Stratégies d'adaptation de maillages avec HOMARD

Résumé :

Ce document a pour objectif de décrire tous les outils de *Code_Aster* liés à l'adaptation de maillage. Il constitue un guide méthodologique sur les bonnes pratiques à mettre en place pour conduire une étude de qualité en terme de maillage.

Des exemples d'utilisation viennent illustrer les possibilités et la mise en œuvre de stratégies de remaillage.

Table des matières

1 Introduction

L'adaptation de maillage apporte une aide à l'utilisateur pour fournir des calculs les plus fiables possible vis-à-vis des erreurs de discrétisation dues à la méthode par éléments finis employée. Plusieurs motivations apparaissent pour adapter un maillage :

- le maillage est très compliqué à réaliser : on part d'une version simple et on confie à un processus automatique la charge de l'affiner.
- on veut s'assurer de la convergence de la solution numérique : plutôt que de réaliser à la main des maillages de plus en plus fins, on laisse le logiciel chercher lui-même les endroits où il faudrait affiner le maillage pour augmenter la précision du résultat.
- les conditions du calcul changent au cours de son déroulement : les zones qui doivent être maillées finement se déplacent. Si on maille fin partout dès le début, le maillage est trop gros. En adaptant au fur et à mesure, le maillage ne sera fin qu'aux endroits nécessaires : sa taille sera réduite et la qualité de la solution sera bonne.

Quels que soient les logiciels utilisés, le principe de l'adaptation de maillage reste le même. Sur le maillage de départ, on réalise le calcul standard. A partir d'une analyse de la solution numérique obtenue, on estime l'erreur qui a été commise par rapport à la solution réelle. Cette estimation se représente par une valeur d'indicateur d'erreur dans chaque élément du calcul. A partir de là, le raisonnement est simple : les mailles où l'indicateur d'erreur est fort devraient être plus petites ; réciproquement, les mailles où l'indicateur d'erreur est faible pourraient être plus grandes. Avec cette information, on alimente le logiciel d'adaptation qui va modifier le maillage en conséquence. Sur le nouveau maillage, on recommencera alors le calcul.

Schématiquement, une itération d'adaptation de maillage se présente comme sur la figure ci-dessous. Le logiciel calcule la solution numérique sur le maillage n°k, puis en déduit les valeurs de l'indicateur d'erreur sur tout le maillage. A partir de la connaissance du maillage n°k et de l'indicateur n°k, le logiciel d'adaptation de maillage, HOMARD pour *Code_Aster*, crée le nouveau maillage n°(k+1).

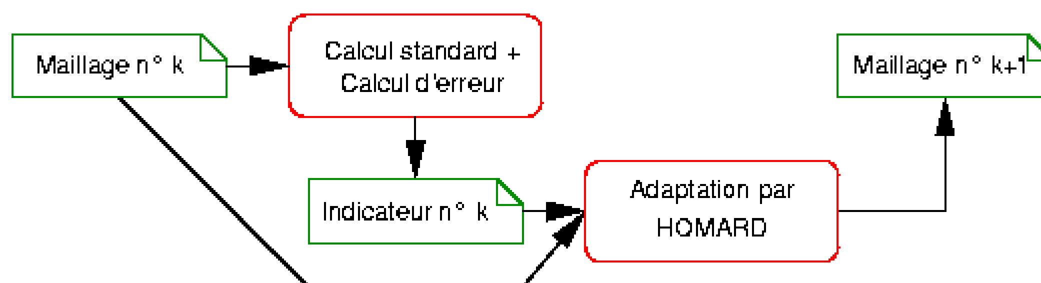


Figure 1-a : Itération d'adaptation de maillage

Pour un calcul statique, cela revient à chercher à améliorer la solution par une succession de calculs sur des maillages différents. Pour un calcul transitoire en temps, le calcul est suspendu à un instant donné ; le maillage est adapté ; le calcul reprend sur le nouveau maillage.

Avec *Code_Aster*, cette adaptation est effectuée par appel à un programme externe, spécialisé dans cette tâche, HOMARD. Le but de ce document est de fournir un point d'entrée le plus complet possible à destination de l'utilisateur désirant mettre en œuvre ce genre de techniques dans ses calculs.

Le plan du document est alors le suivant :

- Comment fonctionne HOMARD ;
- Un zoom sur les indicateurs d'erreur ;
- Un ensemble de conseils sur les « bonnes pratiques » à mettre en œuvre (quels sont les points dignes d'attention lors de l'utilisation ?) ;
- Quelques exemples illustrent l'utilisation de ces techniques et les conseils donnés précédemment (comment faire en pratique ?).

2 Comment fonctionne HOMARD ?

HOMARD est un logiciel développé par EDF R&D. On en trouve une présentation sur son site Web [bib1] et dans sa documentation propre [bib2].

2.1 Le périmètre d'utilisation de HOMARD

La commande de *Code_Aster* qui permet d'accéder à ces fonctions est `MACR_ADAP_MAIL`. Elle est documentée dans [bib3].

HOMARD sait traiter des maillages en 2 ou 3 dimensions, en degré 1 ou degré 2 et comportant les éléments suivants :

- mailles-points
- segments
- triangles
- quadrangles
- tétraèdres
- hexaèdres

Ces éléments peuvent être présents simultanément. Par exemple, HOMARD saura adapter un maillage comportant des triangles et des quadrangles.
Les nœuds acceptés sont évidemment les nœuds qui sont les sommets des mailles, ce qui correspond à la description classique « en degré 1 ». Si les mailles sont décrites « en degré 2 », c'est-à-dire avec présence de nœuds au milieu des arêtes, ces nœuds complémentaires sont gérés. En revanche, il ne peut pas y avoir cohabitation de mailles décrites en degré 1 et de mailles décrites en degré 2. Enfin, HOMARD sait prendre en compte des nœuds isolés, qui n'appartiendraient à aucune définition de mailles : ils ressortiront tels quels du processus d'adaptation.

Un cas particulier : les pentaèdres. A la date de rédaction de ce document, HOMARD sait traiter des maillages comportant des pentaèdres mais uniquement pour faire du raffinement uniforme. Le raffinement libre sera disponible en fin 2011.

2.2 Un mot sur les modes de découpage des éléments

Il est intéressant ici de connaître le mode de découpage des mailles dans HOMARD afin de ne pas être surpris éventuellement par le nouveau maillage. Nous donnerons uniquement un exemple en 2D ; pour le 3D, le lecteur consultera le site Web de HOMARD [bib1].
Parmi les diverses techniques possibles pour adapter un maillage, HOMARD utilise le raffinement et le déraffinement par découpage des mailles.
Le découpage standard est celui qui s'applique à toute maille au cœur d'une zone à raffiner : un triangle est découpé en quatre triangles (Figure 2.2-a) et un quadrangle est découpé en quatre quadrangles (Figure 2.2-b). En 3 dimensions, un tétraèdre est découpé en huit tétraèdres, un hexaèdre en huit hexaèdres, un pentaèdre en huit pentaèdres. Chaque découpage prend appui sur les milieux des arêtes bordant la maille.

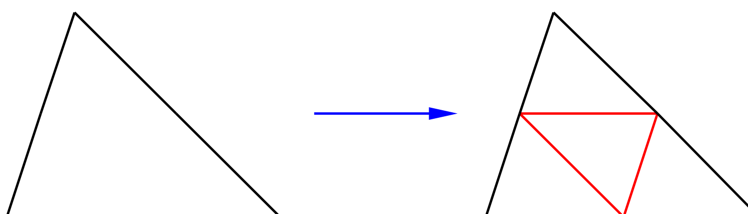


Figure 2.2-a : Découpage standard des triangles

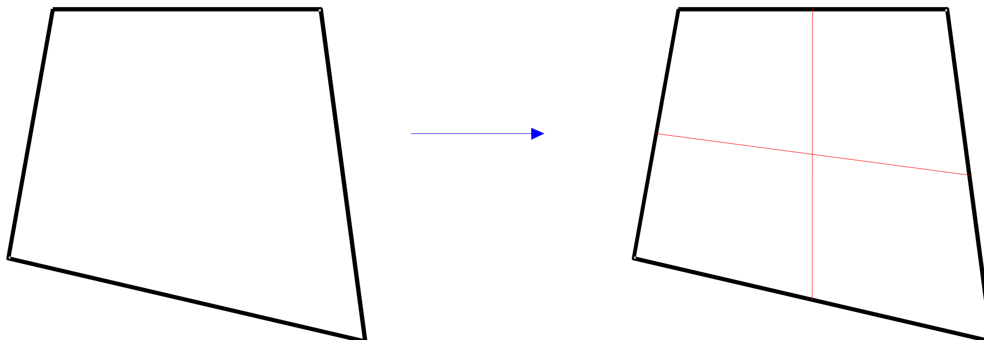


Figure 2.2-b : Découpage standard des quadrangles

Comment HOMARD gère-t-il la conformité ?

Partons d'une situation comme celle de la Figure 2.2-c représentant un maillage bidimensionnel formé de quadrangles et de triangles. L'indicateur d'erreur aura demandé un raffinement sur les zones hachurées.

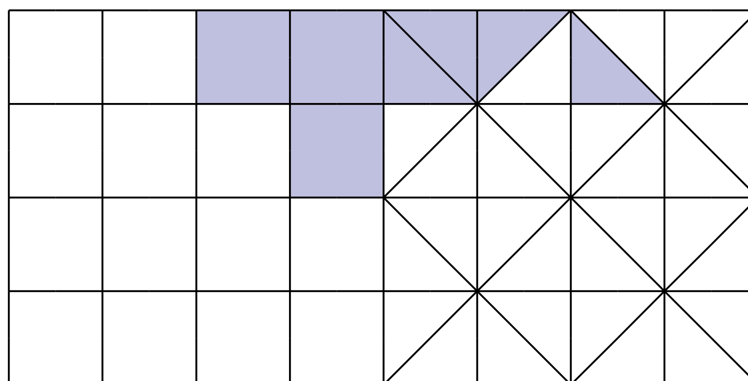


Figure 2.2-c : Exemple de demande de raffinement

La stricte application du principe de découpage des mailles désignés par l'indicateur d'erreur produit le maillage de la Figure 2.2-d :

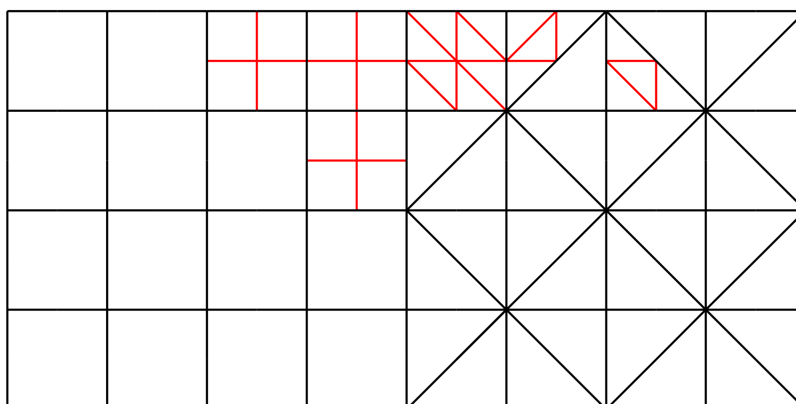


Figure 2.2-d : Exemple de raffinement non conforme brut

Pour gérer la conformité, la règle est la suivante :

- Si une maille non découpée se voit attaquée par au moins deux côtés, elle est également coupée en quatre ;
- Si une maille se voit attaquée par un seul côté :

- s'il s'agit d'un triangle, il est découpé en deux,
- s'il s'agit d'un quadrangle, il est découpé en trois triangles

Ce qui donne pour notre exemple :

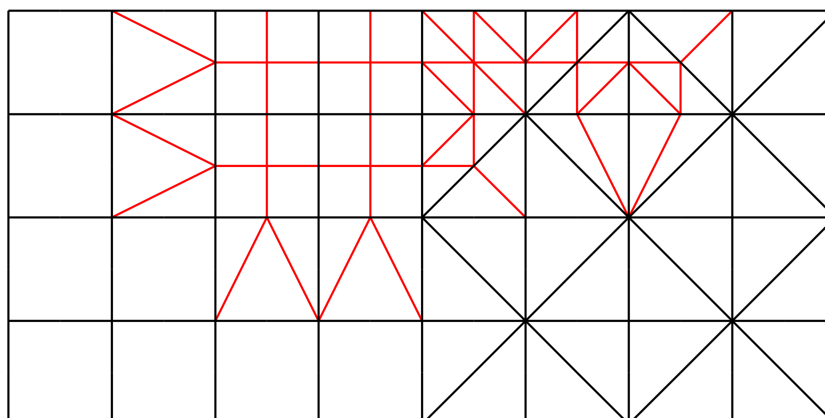


Figure 2.2-e : Mise en conformité finale

Commentaire à propos de la qualité des maillages issus du découpage :

Au cours du découpage standard, les triangles produits sont rigoureusement identiques aux triangles de départ. Il y a une parfaite homothétie donc identité des qualités de maillages. Pour les quadrangles, la situation n'est pas aussi simple. Si le quadrangle est un parallélogramme, les quadrangles produits sont également homothétiques. C'est donc le cas pour un carré ou un rectangle. La qualité de maillage reste alors la même. En revanche, dès que le quadrangle est quelconque, les 4 fils ne ressemblent jamais au père : la qualité bouge.

Pour les découpages de mise en conformité finale, il est flagrant qu'ils modifient la qualité des mailles. Un triangle équilatéral aura deux fils aplatis ; un tétraèdre régulier aura des fils effilés. Inversement un triangle aplati et coupé par son grand côté aura deux fils assez réguliers, et ainsi de suite. Nous avons donc des situations favorables et d'autres qui le sont moins. Si nous ne faisons rien, nous courrons le risque de voir se dégrader la qualité du maillage. Imaginons en effet le cas d'une zone où les indications de raffinement conduiraient à subdiviser un triangle de mise en conformité. Au bout de quelques adaptations, la qualité du maillage serait complètement dégradée. HOMARD gère ces difficultés par un algorithme spécial qui garantit que les angles ne s'aplatissent pas au fil des itérations. Nous limitons ainsi les modifications du niveau de qualité du maillage : la qualité du maillage, à un niveau quelconque d'adaptation, reste comparable à la qualité du maillage de départ.
Nous renvoyons le lecteur à [bib2] pour une description fine de cette analyse de la qualité de maillage, illustrée par des cas types.

2.3 Les différents modes d'adaptation

Il existe plusieurs choix pour piloter une adaptation à travers la commande `MACR_ADAP_MAIL` documentée dans [bib3].

1) En premier lieu, on trouve les modes d'adaptations qui sont pilotées par un champ ou la dérivée de ce champ, par exemple un indicateur d'erreur (mots clé '`RAFFINEMENT`', '`DERAFFINEMENT`' et '`RAFF_DERA`'). Ce champ peut être exprimé sur les nœuds ou les éléments. En d'autres termes, la décision de (dé) raffiner une maille se prend en fonction de la valeur de ce champ calculé auparavant sur cette maille ou du saut de ce champ d'une maille à ses voisines. Le choix des seuils de raffinement ou de déraffinement se fait sous trois formes :

   - une valeur seuil de ce champ en absolu (mot clé '`CRIT_RAF_ABS`') : on raffinera toutes les mailles où la valeur du champ est supérieure à cette valeur seuil.
   - une valeur du champ en relatif (mot clé '`CRIT_RAF_REL`') : on raffinera les mailles où la valeur du champ est supérieure à x% de la valeur maximale.

- une fraction d'éléments (mot clé 'CRIT_RAF_PE') : on raffinera les x% de mailles où la valeur du champ est le plus important.

Remarque :

Quand on applique une option de déraffinement, on ne fait que revenir en arrière sur des raffinements antérieurs. Il faut comprendre cette option comme du dé-raffinement. En particulier, on ne pourra jamais obtenir un maillage plus grossier que le maillage initial.
Si le champ de pilotage est défini sur les nœuds, HOMARD coupera en deux toutes les arêtes dont les nœuds ont des valeurs de champ supérieures au critère demandé.

Selon les types de problèmes, l'une ou l'autre des stratégies est préférable ; c'est le savoir-faire propre à chaque discipline qui permet de définir des bonnes pratiques. Il faut néanmoins être prudent et ne pas demander trop de raffinement quand on travaille avec des maillages conformes. En effet, le seuil va déclencher le raffinement obligatoire des mailles désignées. Mais pour assurer la conformité, il y aura nécessairement des raffinements supplémentaires pour relier les zones de différents niveaux. Au final, on aura toujours plus de mailles découpées que celles qui avaient été demandées initialement. L'expérience nous a montré qu'il est plus efficace pour la précision de la solution d'enchaîner 3 raffinements de suite en demandant de raffiner 1% des mailles plutôt que de ne faire qu'un seul raffinement en demandant 5%.

1) En second lieu, on peut décider de raffiner le maillage dans des zones géométriques définies par des boîtes (mot clé 'RAFF_DERA_ZONE'). Toutes les mailles dont un des nœuds est présent dans l'une de ces boîtes seront raffinées. Cela permet de faire des raffinements *a priori*, sans avoir fait de calcul. Les zones sont des rectangles ou des cercles en 2D, des parallélépipèdes ou des sphères en 3D. Il est possible de définir plusieurs boîtes, se superposant ou non.

1) Enfin, on peut activer une adaptation uniforme d'un maillage (mot clé 'RAFFINEMENT_UNIFORME' et 'DERAFFINEMENT_UNIFORME'). En d'autres termes, toutes les mailles du maillage sont traitées de la même manière, sans tenir compte d'un champ servant de critère pour (dé)raffiner.

Remarque :

Les caractéristiques des mailles sont préservées : une maille qui est découpée transmet à ses filles ses propriétés d'orientation ou d'appartenance à des sous-domaines. C'est en particulier vrai pour les mailles de bord qui servent à appliquer les chargements : le groupe qui les définit est restitué et il est inutile de les réorienter

2.4 Autres options possibles

Les différentes options qui peuvent être activées dans MACR_ADAP_MAIL :

- HOMARD met à jour des champs réels de l'ancien vers le nouveau maillage lorsqu'ils sont définis sur les nœuds (mot clé MAJ_CHAM). Cela permet au cours d'un calcul transitoire de repartir de la solution précédemment calculée mais exprimée sur le nouveau maillage. De manière générale, il est d'ailleurs recommandé de mettre à jour les champs via HOMARD plutôt que de les projeter d'un maillage sur l'autre ensuite dans le logiciel de calcul. En effet, HOMARD mémorise la filiation de tous les nœuds et mailles : il ne fera donc que les calculs strictement nécessaires et uniquement par des formules analytiques. Actuellement, on ne peut pas mettre à jour des champs aux points de Gauss (comme les variables internes par exemple).
- HOMARD possède des fonctions d'analyse de maillage : connexité (le logiciel informe sur le nombre de blocs disjoints qui forment le maillage global), taille (calcul des tailles des différents sous-domaines 1D, 2D ou 3D), qualité (détermination de la qualité des éléments 2D ou 3D, valeurs extrêmes et répartition), interpénétration (contrôle du non recouvrement d'éléments). Ces fonctions sont activables au cours d'une adaptation. Elles peuvent aussi être utilisées hors de toute adaptation pour vérifier un maillage. Elles aident l'utilisateur à vérifier que son maillage est correct et à repérer des erreurs dans sa réalisation. On peut retrouver ces fonctionnalités sur la qualité du maillage dans la commande MACR_INFO_MAIL [bib4].
- L'utilisateur a la possibilité de faire du suivi de frontière (mots-clés MAILLAGE_FRONTIERE et/ou FRONTIERE_ANALYTIQUE). Si une des frontière du domaine de calcul est courbe et qu'une maille touchant cette frontière est raffinée, HOMARD saura placer les nouveaux nœuds sur le « vrai »

bord. Cette option permet de « gommer » au fur et à mesure du découpage les singularités géométriques (voir exemple du rotor au paragraphe 6).

- Quand on adapte un maillage en degré 2 par la commande `MACR_ADAP_MAIL`, on produit en sortie le nouveau maillage en degré 2. De manière optionnelle (mot clé `MAILLAGE_NP1_ANNEXE)`, on produira également le même maillage en degré 1. Cette option est intéressante lors d'un calcul thermomécanique où on préconise un maillage linéaire en thermique et quadratique en mécanique.
- Les mots-clé `NIVE_MAX` et `NIVE_MIN` permettent de contrôler le niveau maximal de raffinement, respectivement de déraffinement, d'une maille au cours du processus d'adaptation.
- Le mot-clé `DIAM_MIN` permet de contrôler la taille minimale d'une maille au cours du processus d'adaptation.

3 Les différents critères de raffinement/déraffinement

On a vu au paragraphe 2.3, qu'on peut repérer les zones à raffiner :

- soit avec un indicateur d'erreur ;
- soit avec un champ (ou sa dérivée) que l'on considère comme une mesure de l'erreur (température, contrainte, déformation,…). Ce champ peut être exprimé sur les nœuds ou sur les mailles (aux points de Gauss, aux nœuds par élément ou constant par élément). Si le critère est exprimé aux points de Gauss ou aux nœuds par élément, alors HOMARD choisit le maximum de la valeur dans la maille considérée;
- soit par des boîtes.

Pour les indicateurs d'erreur, plusieurs choix s'offrent à l'utilisateur. C'est l'objet des paragraphes suivants.

3.1 Les indicateurs d'erreur

3.1.1 Qu'est-ce un indicateur d'erreur ?

Il est important ici de redonner la définition de ce qu'on entend par indicateur d'erreur (ou estimateur d'erreur) afin que l'utilisateur soit bien conscient de ce que l'on peut faire ou ne pas faire dire à cet indicateur.
Une fonction e est un indicateur d'erreur a posteriori s'il vérifie l'inéquation :

$$\|u-u^h\|\leq e(h,u^h,d)$$

où u est le champ de déplacement de la solution exacte, u^h le champ de déplacement de la solution élément fini, $\|\cdot\|$ une norme sur les champs de déplacements, h la taille des éléments et d des données du problème. De plus si $e(h,d,u^h)$ peut être localisé sous la forme :

$$e(h,u^h,d)=\left(\sum_E e_E(u^h,d)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

alors les quantités $e_E(u^h,d)$ sont appelées des indicateurs locaux d'erreur.
Pour les deux types d'indicateurs d'erreur (donc deux fonctions e différentes) présents dans *Code_Aster*, la norme $\|\cdot\|$ est une norme en énergie.

3.1.2 Ce qu'il faut retenir

Ces indicateurs d'erreur conduisent à l'estimation d'une erreur globale. Le choix d'une précision globale fondée sur la norme en énergie est souvent délicat à interpréter car il n'y a pas de lien direct quantitatif avec une erreur sur des quantités mécaniques locales (contraintes en un point ou sur une ligne, maximum des contraintes, etc.) et l'erreur en déplacement. Autrement dit, X% de l'indicateur d'erreur dans une maille ne signifie pas qu'il y a X% d'erreur sur la contrainte ou la déformation.

Utilisé seul, c’est-à-dire sans objectif de réaliser de l’adaptation de maillage, l’indicateur ne permet pas de quantifier la qualité du maillage initial, sauf éventuellement à repérer les zones à problème, comme les singularités géométriques ou les forts gradients.

3.1.3 Périmètre d’utilisation

Les indicateurs d’erreur utilisés dans *Code_Aster* sont des indicateurs a posteriori et sont donc calculés en post-traitement de *Code_Aster* par la commande `CALC_ERREUR`. Ce sont des champs constants par élément (donc une valeur par élément fini). Leur domaine d’utilisation est délimité par les contraintes suivantes (on se reportera aux documents de référence donnés au paragraphe pour plus de détails) :

- les erreurs prises en compte sont les erreurs de discrétisation spatiale (donc la taille des éléments employés) ; en particulier, les erreurs de discrétisation temporelle (ou pseudo-temporelle dans le cas de matériaux non-linéaires) sont en dehors de ce périmètre ;
- les phénomènes physiques sont limités à la mécanique (linéaire ou non-linéaire) et à la thermique (idem.) ;
- en mécanique comme en thermique, le comportement peut être linéaire ou non linéaire (sauf pour l’estimateur d’erreur de Zhu-Zienkiewicz en mécanique qui ne traite que le comportement linéaire), sachant que les résultats théoriques des indicateurs d’erreur sont obtenus dans le domaine linéaire (leur utilisation dans le domaine non-linéaire n’est donc pas basé sur des résultats théoriques mais sur une constatation empirique de leur intérêt) ;
- les éléments utilisés peuvent être quelconques pour l’utilisation des indicateurs d’erreurs (sauf pour l’estimateur d’erreur de Zhu-Zienkiewicz en mécanique, qui ne traite que les éléments 2D ; l’estimateur $ZZ2$ n’accepte que des maillages composés soit de triangles soit de quadrangles) ; Ces éléments peuvent être linéaires ou quadratiques.

3.1.4 Estimateur d’erreur en mécanique

Il existe deux types d’estimateur pour la mécanique :

- L’estimateur d’erreur de Zhu-Zienkiewicz [bib5] qui se calcule directement dans l’opérateur `CALC_ERREUR` avec les options ‘`ERZ1_ELEM`’ pour l’estimateur $ZZ1$ et ‘`ERZ2_ELEM`’ pour l’estimateur $ZZ2$. Ce champ comporte trois composantes par élément E :
  - ‘`ERREST`’ : l’erreur totale absolue e_E ;
  - ‘`NUEST`’ : l’erreur totale relative $e_{E_{REL}}=100\times\frac{e_E}{\sqrt{e_E^2+\|\sigma_h\|_E^2}}$;
  - ‘`SIGCAL`’ : la norme d’énergie de la solution calculée $\|\sigma_h\|_E$.
- L’estimateur d’erreur en résidu [bib6] qui se calcule également dans l’opérateur `CALC_ERREUR` avec les options ‘`ERME_ELEM`’ pour le calcul dans l’élément et ‘`ERME_ELNO`’ pour le calcul aux nœuds par éléments. Ce champ comporte huit composantes par élément E :
  - ‘`ERREST`‘: l’erreur totale absolue e_E ;
  - ‘`TERMRE`’ : l’erreur absolue du résidu de l’équilibre ;
  - ‘`TERMSA`’ : l’erreur absolue des sauts de contraintes entre deux mailles ;
  - ‘`TERMNO`’ : l’erreur absolue des sauts entre la contrainte normale et la force de Neumann ;
  - ‘`NUEST`’ : l’erreur totale relative ;
  - ‘`TERMR2`’ : l’erreur relative du résidu de l’équilibre ;
  - ‘`TERMS2`’ : l’erreur relative des sauts de contraintes entre deux mailles ;
  - ‘`TERMN2`’ : l’erreur relative des sauts entre la contrainte normale et la force de Neumann ;
  - ‘`SIGCAL`’ : la norme d’énergie de la solution calculée ;

Pour ces deux types d’estimateurs d’erreur, l’utilisateur a également accès à des impressions dans le fichier de résultat comportant les mêmes informations au niveau global.

Quelques conseils pour une bonne utilisation de l'option `ERME_ELEM` :

- Pour bien effectuer le calcul de l’indicateur en résidu (dans les limites théoriques de la formule mise au point dans le cadre elliptique avec frontière régulière …), il faut le calculer sur tout le modèle (CALC_ERREUR (TOUT = 'OUI' (valeur par défaut))). À noter que le modèle n’est pas forcément défini sur toute la géométrie.
- On ne tient compte que des chargement de type : PESANTEUR, ROTATION, FORCE_INTERNE, PRES_REP, FORCE_FACE, FORCE_ARETE. Seules les trois dernières peuvent être variables. Pour les autres types de chargements, l'exécution s'arrête en erreur fatale.
- Il est conseillé d'utiliser des éléments finis d'ordre 2 dans le cas de forces volumiques, sinon ce terme est très mal calculé puisque DIV(SIGMA) est quasi nul !
- Pour prendre en compte l'erreur relative à une CL nulle de type Neumann il faut l'imposer en tant que fonction via un AFFE_CHAR_MECA_F. Via une constante, elle ne sera pas prise en compte.
- En 2D, il prend en compte les erreurs sur (et entre) les éléments isoparamétriques SEG2/3, TRIA3/6/7, QUAD4/8/9. En 3D, idem avec FACE3/4/6/8/9, TETRA4/10, PENTA6/13/15 et HEXA8/20/27. Seuls l'erreur sur les éléments de structure (coque, plaque, poutre...) et les PYRAM ne sont pas prise en compte.
- D'autre part, il faut veiller à ne pas intercaler de segments entre deux quadrangles ou deux triangles (resp. quadrangle ou triangle entre deux hexaèdres), sinon on ne peut pas calculer le terme de saut relatif à ce voisinage.

3.1.5 Estimateur d’erreur en thermique

Il existe un seul indicateur d’erreur en thermique [bib7] qui est de type résidu. Il est calculé dans l’opérateur CALC_ERREUR, par les options ‘ERTH_ELEM’ pour le calcul par éléments et ‘ERTH_ELNO’ pour le calcul par éléments aux nœuds. Pour l’option ‘ERTH_ELEM’ , il faut obligatoirement calculer le flux par élément aux nœuds ‘FLUX_ELNO’.
L’estimateur fournit les composantes suivantes :

- ERTABS : erreur absolue totale
- ERTREL : erreur relative totale
- TERMNO : terme de normalisation pour l’erreur totale relative
- TERMVO : erreur absolue du résidu de l’équilibre (terme volumique)
- TERMV2 : erreur relative du résidu de l’équilibre (terme volumique)
- TERMV1 : terme de normalisation pour l’erreur volumique
- TERMSA : erreur absolue des sauts du flux de chaleur entre deux mailles
- TERMS2 : erreur relative des sauts du flux de chaleur entre deux mailles
- TERMS1 : terme de normalisation pour l’erreur relative en saut
- TERMFL : erreur absolue sur les conditions aux limites type flux imposé
- TERMF2 : erreur relative sur les conditions aux limites type flux imposé
- TERMF1 : terme de normalisation sur l’erreur relative sur le flux
- TERMEC : erreur absolue sur les conditions aux limites type échange
- TERME2 : erreur relative sur les conditions aux limites type échange
- TERME1 : terme de normalisation sur l’erreur relative sur les échanges

Quelques conseils pour une bonne utilisation :

- règles de surcharge particulières concernant les chargements (génération d’alarme <A> en cas de non-respect) ;
- calcul sur tout le maillage associé au modèle (génération d’erreur <F> en cas de non-respect) entre deux pas de temps contiguës ou non (génération d’alarme <A> en cas de non-respect) ;
- tous les éléments 2D-plan/axi et 3D sont traités (sauf PYRAM : génération d’alarme <A>) ;
- toutes les conditions limites sauf ECHANGE_PAROI, FLUX_NL et RAYO sont prises en compte (génération d’alarme <A> en cas d’utilisation d’ECHANGE_PAROI, FLUX_NL ou RAYO) ;
- le maillage tolère les « ébauches » mais nécessite d’être un peu « nettoyé » (pas de SEG/FACE intercalés dans des surfaces/volumes, problème de symétrisation, de points doubles : génération d’alarme <A> ou d’erreur <F>).

3.2 Les estimateurs d'erreur en quantité d'intérêt

3.2.1 Avertissement

Contrairement aux indicateurs d'erreur classiques ci-dessus, indicateurs d'erreur dit en quantité d'intérêt permettent d'accéder à une **erreur locale** sur des quantités physiques (contrainte, déplacement), et donc dans l'unité de cette quantité.
Leur utilisation est plus délicate et demande sans doute une lecture rapide de la documentation [bib9] et une lecture plus attentive des recommandations données pour l'usage de CALC_ERREUR.
De plus, leur développement étant très récent, il y a peu de retours d'expérience sur leur utilisation. Ce qui suit est donc intégralement issu de la documentation de référence et d'un compte-rendu [bib10].

3.2.2 Que calculent ces indicateurs ?

Ces indicateurs d'erreur permettent d'estimer dans une sous-région du maillage une quantité physique, par exemple :

Une moyenne de déplacement (la composante x par exemple) dans cette sous-région, mathématiquement exprimée par l'équation $Q(u)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u_x \, d\omega$.

Une moyenne de contraintes (par exemple la composante xx) $Q(u)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \sigma_{xx} \, d\omega$.

Une fois choisie la quantité d'intérêt, l'indicateur estime la quantité $\varepsilon^Q = Q(u) - Q(u^h)$.

C'est ici que résulte la difficulté pour l'utilisateur car cette quantité d'intérêt doit être exprimée en terme de chargement **connu** dans AFFE_CHER_MECA.

Par exemple, pour la quantité d'intérêt en moyenne du déplacement, elle est équivalente à un chargement volumique :

$$Q(u)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u_x \, d\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f \;\; u \;\; d\Omega \quad \text{avec} \quad \vec{f}=(1{,}0{,}0)$$

En choisissant correctement le vecteur $\vec{f}$, on accède à chaque composante du déplacement et éventuellement à des combinaisons linéaires des composantes. Ce chargement est accessible par le mot-clé 'FORCE_INTERNE' dans 'AFFE_CHAR_MECA'.
De la même manière, pour la quantité d'intérêt moyenne de la contrainte, elle est équivalente à un chargement de déformation initiale :

$$Q(u)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \sigma_{xx} \, d\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} A:\sigma(u) \, d\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} A:K:\varepsilon(u) \, d\Omega$$

On contrôle le choix de la composante du tenseur des contraintes par le choix des composantes du tenseur A . Ce chargement est accessible dans par le mot-clé 'PRE_EPSI' dans 'AFFE_CHAR_MECA'.

Ces deux quantités sont assez simples à mettre en œuvre car elles sont représentées par un chargement existant dans *Code_Aster*. Pour des quantités plus compliquées (fonctions du tenseur des contraintes par exemple) et éventuellement non linéaires, il est très difficile de les exprimer en fonction de chargements connus. C'est la difficulté principale à lever pour programmer de nouvelles quantités d'intérêt.

3.2.3 Périmètre d'utilisation

Ces quantités d'intérêt sont calculées à partir des indicateurs d'erreur classiques présentés au § 3.1 et uniquement pour la mécanique. Leur domaine d'utilisation est donc identique à celui de l'indicateur mécanique choisi pour les calculer.
On rappelle, de nouveau, que la quantité d'intérêt choisie dépend du degré de développement des chargements dans AFFE_CHAR_MECA.

3.2.4 Les différentes options dans CALC_ERREUR

Les différentes options possibles dans CALC_ERREUR sont :

- 'QIZ1_ELEM' (respectivement 'QIZ2_ELEM') : estimateur d'erreur en quantité d'intérêt basé sur la méthode de Zhu-Zienkiewicz. Il faut calculer préalablement l'option 'ERZ1_ELEM' ou 'ERZ2_ELEM'.
- 'QIRE_ELEM' (par élément) ou 'QIRE_ELNO' (par élément aux nœuds) : estimateur d'erreur en quantité d'intérêt basé sur les résidus en mécanique. Il faut calculer préalablement l'option 'ERME_ELEM'.

Conseil d'utilisation :

Le domaine d'utilisation des options 'QIZ1_ELEM' et 'QIZ2_ELEM' est le même que pour les options 'ERZ1_ELEM' et 'ERZ2_ELEM' et celui de l'option 'QIRE_ELEM' est le même que celui de l'option 'ERME_ELEM' en mécanique.
A ce jour, seulement deux quantités d'intérêt sont disponibles : moyenne d'une composante du déplacement et moyenne d'une composante du tenseur des contraintes.
Le calcul de la quantité d'intérêt passe par la résolution d'un calcul élastique (commande MECA_STATIQUE) dont le chargement est d'une part, le même que celui du problème principal sur les conditions de Dirichlet (donc en déplacement imposé), et d'autre part, celui représentant la quantité d'intérêt choisie ('FORCE_INTERNE' ou 'PRE_EPSI'). Nous donnons ci-dessous un exemple de fichier de commande.

```
        #  RESOLUTION DU PROBLEME

            CHARG=AFFE_CHAR_MECA(
                      MODELE=MO,
                      FACE_IMPO=(_F(GROUP_MA='GRMA1',DY=0.0,),
                                 _F(GROUP_MA='GRMA2', DY=0.91333,),),
                      FORCE_CONTOUR=(_F(GROUP_MA='GRMA3', FX=1.0,),
                                     _F(GROUP_MA='GRMA4', FX=-2.0,),),);

            RESU=MECA_STATIQUE(
                      MODELE=MO,
                      CHAM_MATER=CM,
                      EXCIT=_F(CHARGE=CHARG,),);


            RESU=CALC_ERREUR(reuse =RESU,
                      RESULTAT=RESU,
                      TOUT_ORDRE='OUI',
                      OPTION=('SIGM_ELNO','ERME_ELEM',),);

#  CALCUL DE LA QUANTITE D INTERET EN MOYENNE DE CONTRAINTE SUR LE
GROUPE DE MAILLES GRMAQI

            CHARQ=AFFE_CHAR_MECA(
                      MODELE=MO,
                      FACE_IMPO=(_F(GROUP_MA='GRMA1',DY=0.0,),
                                 _F(GROUP_MA='GRMA2',DY=0.91333,),),
                      FORCE_INTERNE=_F(GROUP_MA='GRMAQI',FX=1.0,),);
```

```
          RESUQ=MECA_STATIQUE(MODELE=MO,
                    CHAM_MATER=CM,
                    EXCIT=_F(CHARGE=CHARQ,),);

          RESUQ=CALC_ERREUR(reuse =RESUQ,
                    RESULTAT=RESUQ,
                    TOUT_ORDRE='OUI',
                    OPTION=('SIGM_ELNO','ERME_ELEM',),);

#  CALCUL DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR EN QUANTITE D'INTERET

          RESU=CALC_ERREUR(reuse =RESU,
                    RESULTAT=RESU,
                    OPTION=('QIRE_ELEM'),
                    RESU_DUAL=RESUQ,);
```

3.3 Détection des singularités

Un autre champ possible (uniquement en mécanique) qui peut servir de critère pour raffiner le maillage est l'utilisation de l'option 'SING_ELEM' (champ constant par élément) ou 'SING_ELNO' (champs par éléments aux nœuds) dans CALC_ERREUR. Ce champ est calculé à partir des indicateurs d'erreur et il vise à améliorer le traitement des singularités dans les stratégies d'adaptation de maillage. Le lecteur trouvera dans [bib8] un descriptif théorique des méthodes employées.
En pratique les indicateurs d'erreur sont élevés dans les zones singulières si bien que rapidement seules les zones singulières sont raffinées. Cela masque donc les autres zones sensibles (zones à fort gradient) que l'on souhaiterait raffiner. Ce champ constant par élément comporte deux composantes :

- 'DEGRE' qui indique le niveau de singularité d'une maille. En pratique, cette composante vaut le degré d'interpolation des éléments finis choisis si l'élément fini n'est connecté à aucune singularité et vaut l'ordre de la singularité si l'élément fini est connecté à un nœud considéré par la méthode comme singulier (par exemple pour un élément voisin de la pointe d'une fissure, cette valeur vaut 0.5). Cette valeur ne peut être supérieure au degré d'interpolation donc 1 ou 2.
- 'RAPPORT' qui correspond à la carte de modification de taille des éléments finis en cas de remaillage pour une erreur globale donnée. Cette composante est égale au rapport entre la taille actuelle et la nouvelle taille de l'élément fini.
- 'TAILLE' qui correspond à la carte de taille des éléments finis en cas de remaillage pour une erreur globale donnée.

Conseil d'utilisation :

Le calcul de cette option nécessite, au préalable, le calcul d'un indicateur d'erreur (c'est la composante absolue qui est utilisée et c'est codé en dur dans Code_Aster) et de l'énergie de déformation totale. Dans le cas où l'une de ces options n'est pas calculée, un message d'alarme est émis et l'option 'SING_ELEM' n'est pas calculée.
Pour l'énergie de déformation totale, on utilise 'ETOT_ELEM' avec STAT_NON_LINE ou 'EPOT_ELEM' avec MECA_STATIQUE.
L'utilisateur doit également renseigner le mot-clé 'PREC_ERR' (un message fatal est émis en cas d'absence) qui permet de calculer la précision souhaitée sur l'erreur globale pour déterminer la carte de modification de taille. La valeur de 'PREC_ERR' est comprise strictement entre 0 et 1 et un message fatal est émis si cette condition n'est pas vérifiée.
Le périmètre d'utilisation est le même (mais plus réduit) que celui de l'indicateur d'erreur choisi à savoir :

- Pour l'indicateur en résidu : éléments finis des milieux continus en 2D (triangles et quadrangles) ou 3D (uniquement les tétraèdres) pour un comportement élastoplastique,
- Pour l'indicateur de Zhu-Zienkiewicz : éléments finis des milieux continus en 2D (triangles et quadrangles) pour un comportement élastique.

En toute rigueur, le calcul de l'ordre de la singularité est obtenu à partir de l'énergie théorique en pointe de fissure, équation valable uniquement en élasticité. L'utilisation de cette option en élastoplasticité est donc à manipuler avec prudence.

4 Conseils et bonne pratique

4.1 Sur le maillage initial

Indépendamment de tout désir de réaliser de l'adaptation de maillage, nous conseillons de vérifier le maillage initial avec la commande MACR_INFO_MAIL [bib4]. Cette commande permet de réaliser, à peu de frais, les vérifications suivantes :

- vérifier la concordance du maillage avec la géométrie initiale (en masse, en dimension, en surface et en volume) ;
- lister les GROUP_MA et GROUP_NO, pour une bonne modélisation des conditions aux limites ;
- diagnostiquer d'éventuels problèmes (symétrisation ou connexité, éléments d'ébauche, mauvaise prise en compte de conditions aux limites, interpénétration de mailles) ;
- évaluer la qualité du maillage par le critère q suivant (évalué maille par maille) :
  - pour les triangles : $q=\alpha\times\frac{h}{r}$, où h est la longueur du plus grand côté, r le rayon du cercle inscrit et α un coefficient de normalisation tel que q vaut 1 pour un triangle équilatéral,
  - pour les quadrangles : $q=\alpha\times\frac{h\times k}{S}$, où h est le maximum de longueur des côtés et des diagonales, k la moyenne quadratique des longueurs des côtés, S le minimum des surfaces des quatre triangles internes et α un coefficient de normalisation tel que q vaut 1 pour un carré,
  - pour les tétraèdres : $q=\alpha\times\frac{h}{r}$, où h est la longueur du plus grand côté, r le rayon de la sphère inscrite et α un coefficient de normalisation tel que q vaut 1 pour un tétraèdre équilatéral,
  - pour les hexaèdres : $q=\alpha\times(\text{qualité du pire des 24 tétraèdres inscrits})$, où α est un coefficient de normalisation tel que q vaut 1 pour un cube.

Conseil : Un critère empirique peut être proposé : par exemple, au moins 50% des mailles avec une qualité < 1.5, au moins 90% des mailles avec une qualité < 2.0, pas de mailles avec une qualité au dessus de 10.

4.2 Sur HOMARD

Après découpage des mailles, les groupes de mailles sont mis à jour ; en revanche les groupes de nœuds sont laissés inchangés. Il faut s'astreindre à imposer des conditions aux limites sur des groupes de mailles et non des groupes de nœuds ; il faut donc proscrire (mais c'est une règle de bon sens) l'utilisation directe de numéros de mailles ou de nœuds lors des affectations pour lui préférer la notion de groupe de mailles.
On rappelle que l'adaptation par HOMARD accepte tous les types d'éléments, de degré 1 ou 2, dans un maillage conforme en zones connexes ou non, de même dimension ou non sauf les pyramides et les pentaèdres (pour le raffinement uniforme). Par contre pour l'analyse de maillage, HOMARD gère les pentaèdres.

4.3 Sur la stratégie d'adaptation

L'enchaînement « opérateurs thermo-mécaniques / MACR_ADAP_MAIL option 'RAFFINEMENT_UNIFORME' » (i.e. sans indicateur d'erreur) permet de faire converger proprement, automatiquement et facilement un maillage. Il faut cependant prendre garde au nombre de degrés de liberté engendrés ! Cela constitue une solution de facilité, rapide et robuste, mais rapidement

extrêmement coûteuse (plutôt à réserver pour évaluer s’il y a de grosses erreurs de discrétisation ou pour de petites études).
L’enchaînement « opérateurs thermo-mécaniques / `MACR_ADAP_MAIL` option `'RAFFINEMENT'` » (i.e. avec un champ pilotant l'adaptation) permet de faire converger de la manière la plus optimale possible (compte-tenu des outils disponibles) le maillage. Cette méthode demande plus d’efforts que la précédente mais le nombre de degrés de liberté générés est proportionnellement beaucoup plus faible.
L’enchaînement « opérateurs thermo-mécaniques / `MACR_ADAP_MAIL` » peut être réalisé efficacement dans une boucle Python (boucle de type « `for` »), avec éventuellement un test de sortie (boucle de type « while »).
La qualité des mailles est peu impactée par le processus de raffinement / déraffinement. Compte-tenu des choix opérés dans HOMARD®, elle peut même s’améliorer en 3D !
`MACR_ADAP_MAIL` ne dispose pas de processus de régularisation ; donc un mauvais maillage initial produira probablement un mauvais maillage adapté !
Les éléments linéaires sont déconseillés en mécanique. La bonne pratique est plutôt : P_1 lumpé en thermique (`PLAN_DIAG`, `AXIS_DIAG`, `3D_DIAG`) et P_2 (éventuellement sous-intégrés) en mécanique, [bib14].
Le choix du type d’éléments finis prime sur la qualité des mailles sur lesquelles viennent s’appuyer les éléments (Cf. exemple de la poutre ci-dessous).

4.4 Sur les indicateurs d’erreur classique

Choix de l’indicateur d’erreur en mécanique : l’utilisateur a le choix entre $ZZ1$ (première version de l’indicateur de Zhu-Zienkiewicz), $ZZ2$ (deuxième version de l’indicateur de Zhu-Zienkiewicz), et l’indicateur en résidus. Les deux premiers ont un domaine d’application assez réduit (2D linéaire pour $ZZ1$ et $ZZ2$, un seul type d’élément fini dans tout le maillage pour $ZZ2$) : pour une utilisation « standard », on préférera l’indicateur en résidus.
Le type d’indicateur et son mode de normalisation peut avoir une incidence sur le maillage adapté. Par exemple, en mécanique, $e_{E_{REL}}=100\times\frac{e_E}{\sqrt{e_E^2+\|\sigma_h\|_E^2}}$. Cette façon de normaliser peut être dangereuse : s’il y a des zones où la norme de contraintes est faible, l’erreur va avoisiner 100% sur cette zone ; s’il y a des zones où la norme de contraintes est très élevée (singularités par exemple), l’erreur va être faible sur cette zone. Ce n’est évidemment pas le résultat recherché. *Il faut donc utiliser de préférence l’indicateur absolu, à moins de savoir précisément ce que l’on fait.*
Pour les indicateurs de type résidu, on peut aussi « jongler » avec les composantes de l’indicateur thermique et des conditions aux limites,« fictives » ou non, pour orienter la construction d’un maillage raffiné ou déraffiné par zones.
En cas de présence de singularités, il est conseillé de sélectionner le nombre d’éléments sur lesquels le raffinement porte par une fraction d’éléments à raffiner `'CRIT_RAFF_PE'` (et non pas par le quantum d’éléments présentant une erreur supérieur à une fraction de l’erreur totale `'CRIT_RAFF_REL'`). En effet, dans le cas d’une singularité, en utilisant ‘`CRIT_RAFF_REL`’, au bout d’une ou deux itérations d’adaptation, seuls les éléments touchant la singularité seront raffinés. En utilisant `'CRIT_RAFF_PE'`, d’autres zones pourront continuer à être raffinées. Enfin le critère `'CRIT_RAFF_ABS'` (choix par barrière fixe d’erreur) est à réserver aux cas où l’utilisateur connaît très bien le problème envisagé.
En tant que « simple post-traitement » du problème thermo-mécanique, l’indicateur ne peut malheureusement pas fournir de diagnostic plus fiable dans les zones où la résolution du problème initial achoppe. Il est donc préférable de débuter un processus d’adaptation, avec un maillage déjà un peu raffiné « à la main ».
En thermo-mécanique, différentes stratégies d’adaptation de maillage s’offrent à l’utilisateur :

- adapter le maillage suivant un critère thermique uniquement,
- adapter le maillage suivant un critère mécanique uniquement,
- adapter conjointement ou séparément (i.e. avec une ou deux boucles d’adaptation) ; en clair chaîner ou coupler les deux premières stratégies.

La bonne pratique lors d’un tel calcul thermo-mécanique conduit à utiliser deux maillages et à interpoler le champ thermique P_1 sur le maillage mécanique P_2 (via l’opérateur `PROJ_CHAMP`). Si on souhaite ne travailler qu’avec un seul maillage, on peut décliner l’une des stratégies via l’option `MAJ_CHAM` de `MACR_ADAP_MAIL`. Cela permet, tout en adaptant le maillage suivant un critère, de mettre à jour le champ complémentaire sur le nouveau maillage adapté.

En thermique, pour effectuer une adaptation de maillage basée sur l'indicateur `ERTH_ELEM` au cours d'un transitoire, il ne faut pas oublier de démarrer le calcul du pas de temps suivant avec l'ancien `EVOL_THER` remis à jour sur le nouveau maillage.

5 Exemples d'utilisation

5.1 Introduction

Par la suite, nous présentons cinq exemples sur l'adaptation de maillage. Ces exemples ont des objectifs pédagogiques différents. Le premier exemple, qui est le plus récent, est issu d'une étude réalisée à la R&D d'EDF sur un rotor HP. Les trois exemples suivants demeurent plus académiques mais visent à montrer un aspect particulier du processus d'adaptation. Enfin le dernier exemple illustre le mode de découpage choisi par HOMARD (c'est une situation particulière rencontrée par un utilisateur qui s'étonnait du maillage final).

Objectif pédagogique de chacun des exemples

Rotor HP : montrer la nécessité de prendre en compte le suivi de frontière lors de l'adaptation
Poutre en flexion en élasticité :
Savoir interpréter les résultats de la commande `MACR_INFO_MAIL` dans le fichier .mess
Illustrer l'intérêt d'un raffinement libre par rapport à un raffinement uniforme
Utiliser les indicateurs d'erreur en mécanique et choisir la bonne composante (absolue ou relative)
Culasse en thermique :
Utiliser les indicateurs d'erreur en thermique et observer les zones raffinées selon la composante de l'indicateur choisie
Représentation très simplifiée de la plaque à tubes dudgeonnée (calcul thermoplastique) :
Montrer l'intérêt d'une adaptation libre par rapport à une adaptation uniforme sur les temps de calculs
En thermique, donner le fichier de commande python permettant de faire de l'adaptation de maillage en transitoire
Bande de localisation dans une plaque : comprendre le mode de découpage choisi par HOMARD

Remarque :

> *Lorsqu'on réalise de l'adaptation de maillage, il est utile d'avoir quelques notions du langage Python afin de s'éviter la répétition des commandes. On trouvera dans le cas test ZZZZ121a.comm, un exemple de boucle Python.*

5.2 Etude sur le rotor HP

Contexte :

Cette étude a été réalisée au département AMA en 2006 dans le cadre du Projet Durée de Vie des Turbines à Vapeurs du parc nucléaire. Très brièvement, il s'agit de localiser les zones de contraintes maximales rencontrées sur le rotor HP (figure 5.2-a) d'une turbine et d'en évaluer numériquement le niveau de contraintes afin de vérifier s'il existe un risque d'amorçage de fissure par corrosion sous contraintes. Afin de statuer sur le risque de fissuration par CSC, plusieurs modélisations ont été effectuées, dont l'une en 2D axisymétrique du rotor complet avec un aspect sur la qualité du maillage. On renvoie le lecteur au document [bib12] pour de plus amples informations sur cette étude ; notre objectif ici est de pointer uniquement l'aspect maillage.

Démarche de l'étude :

Cette étude s'intéresse aux contraintes maximales obtenues numériquement afin de les comparer à des contraintes seuil issues d'essais expérimentaux. L'analyse des contraintes de Von Mises est en premier lieu requise car ce type de contrainte est toujours majorant vis à vis des composantes pertinentes du tenseur des contraintes. Ainsi, lorsque les contraintes de Von Mises sont inférieures aux contraintes seuil, on considère que le risque de fissuration par CSC est peu probable en l'absence d'impuretés. Cependant, lorsque les contraintes de Von Mises sont supérieures au seuil de fissuration par CSC, il devient nécessaire d'analyser plus finement les valeurs maximales du tenseur des

contraintes, ainsi que les contraintes principales afin d'évaluer les marges par rapport au risque de fissuration par CSC.

Modélisation :

Le comportement du matériau est élastique. Le chargement est de type force centrifuge due à la rotation. Le calcul s'effectue avec la commande `STAT_NON_LINE`. Le maillage initial est libre et très fin dans les zones de courbures, afin d'obtenir des valeurs de contraintes les plus fiables possibles. Les éléments sont des quadrilatères de degré deux. Le maillage comprend 71037 éléments et 217198 nœuds.

Résultat :

On regarde ici les zones où la contrainte de Von Mises est maximale. La zone la plus chargée en contrainte est située près de l'accouplement côté palier AVANT, dans la zone de courbure de la gorge entre l'accouplement et le reste du rotor (zone A). Les autres zones chargées en contrainte se situent au niveau du raccordement des attaches sur le rotor (zone B et C, par exemple).

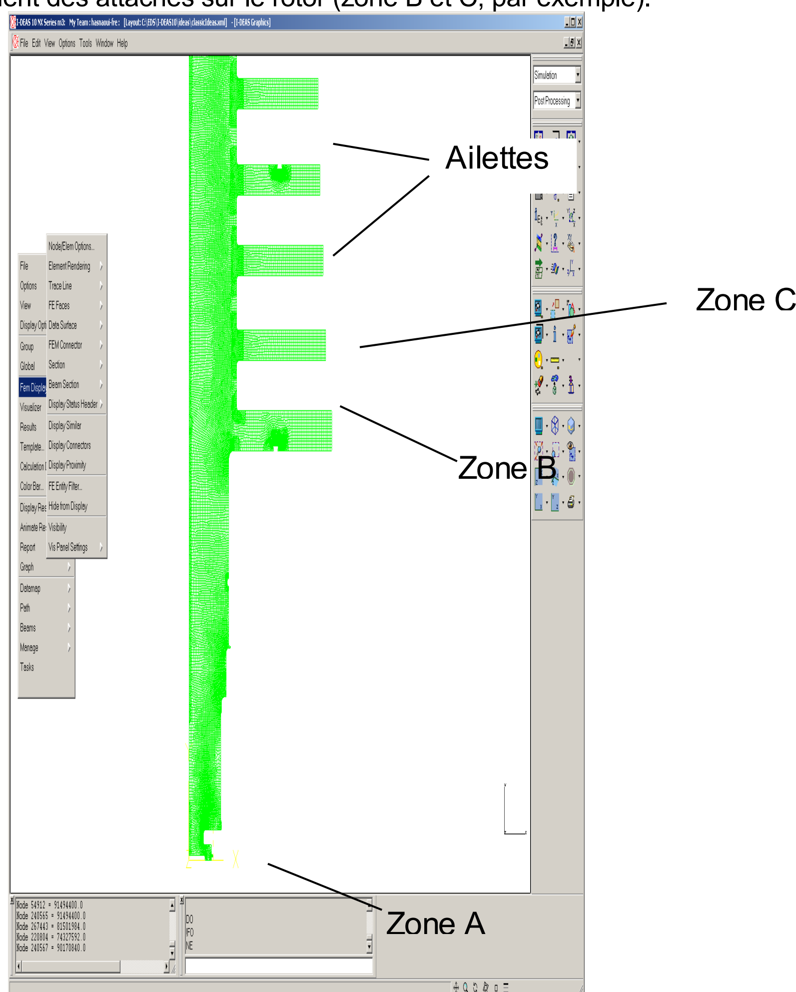


Figure 5.2-a : vue partielle du rotor et des ailettes

Adaptation de maillage :

Afin de valider le niveau de contraintes obtenues dans la zone la plus chargée (zone A) et dans deux des zones de raccordement rotor/ailette (zones B et C), une adaptation de maillage est réalisée avec le terme absolu de l'indicateur d'erreur en résidu et un critère en pourcentage d'élément fini.
Deux résultats sont présentés par la suite :

- l'un sans suivi de frontière : découpage de 5% d'éléments dont l'erreur est la plus grande,

- et l'autre avec suivi de frontière : découpage de 2% d'éléments. Le maillage de la frontière permet, par sa grande discrétisation, de définir très précisément les zones courbes de la géométrie.

Le tableau reprend l'ensemble des évolutions observées de la contrainte de Von Mises dans les zones A, B et C au cours du processus d'adaptation **sans suivi de frontière**.

N° de maillage	1 (initial)	2	3	4
Nombre de mailles	71037	94469	126622	171905
Nombre de nœuds	217198	283192	361692	480643
Contrainte en zone A	0,946	1	1	1
Contrainte en zone B	0,566	0,662	0,699	0,723
Contrainte en zone C	0,446	10,554	0,626	0,681

Tableau 1 : évolution des contraintes de Von Mises sans suivi de frontière

Le tableau ci-dessous montre les mêmes résultats mais **avec suivi de frontière**.

N° de maillage	1 (initial)	2	3	4	5
Nombre de mailles	71037	79857	88085	98332	109678
Nombre de nœuds	217198	237108	259755	288871	320348
Contrainte en zone A	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946
Contrainte en zone B	0,566	0,675	0,662	0,662	0,662
Contrainte en zone C	0,446	0,584	0,632	0,644	0,644

Tableau 2 : Evolution des contraintes de Von Mises avec suivi de frontière

Sans suivi de frontière, on constate que :

- dans la zone A, la contrainte se stabilise dès le deuxième maillage ;
- par contre dans les zones B et C, la contrainte ne se stabilise pas. Ce phénomène est associé à un manque de discrétisation de cette zone courbe qui créé une discontinuité géométrique. Sans suivi de frontière, le remaillage ne permet pas de corriger ce problème et même accentue la discontinuité géométrique, ce qui a pour effet d'augmenter la contrainte.

Avec suivi de frontière, on remarque que :

- La contrainte au niveau de la zone A n'évolue pas. Cette constance est à relier à la diminution du nombre de mailles prises en compte au cours du raffinement. En effet, les résultats obtenus autour de la zone A ne faisant pas partie des 2% de mailles présentant l'erreur la plus importante, aucun raffinement n'est fait dans cette zone et la contrainte reste alors constante. La valeur à prendre en compte pour la contrainte maximale est donc celle présentée dans le tableau 6.1-a.
- Le suivi de frontière permet de stabiliser les contraintes de Von Mises dans les zones B et C.

Conclusion :

Cette analyse montre deux enseignements importants. Premièrement, il est risqué de faire confiance sans regard critique aux résultats d'un calcul mené sur un seul maillage. On voit ici qu'avec le maillage initial, pourtant assez fin à l'œil, les valeurs obtenues sont loin d'être définitives. En modifiant le maillage, elles évoluent jusqu'à se stabiliser. Il ne faut pas se priver de ces calculs supplémentaires,

d'autant plus que leur mise en place est simple et leur réalisation automatisée. Ensuite, on constate l'intérêt d'effectuer du suivi de frontière si la géométrie présente des zones courbes.

5.3 Poutre en flexion en élasticité

Cet exemple a été utilisé lors de formations. C'est un cas-test de la base Code_Aster que l'on peut retrouver sous les tests de type FORMA.

Modélisation :

Il s'agit d'une poutre métallique (acier 16MND5, $E=210.10^3\ Mpa$, $\nu=0.2$) en flexion. Le calcul est élastique (MECA_STATIQUE ou STAT_NON_LINE) en modélisation contraintes planes (C_PLAN). Le maillage initial est soit en TRIA3 soit en TRIA6.

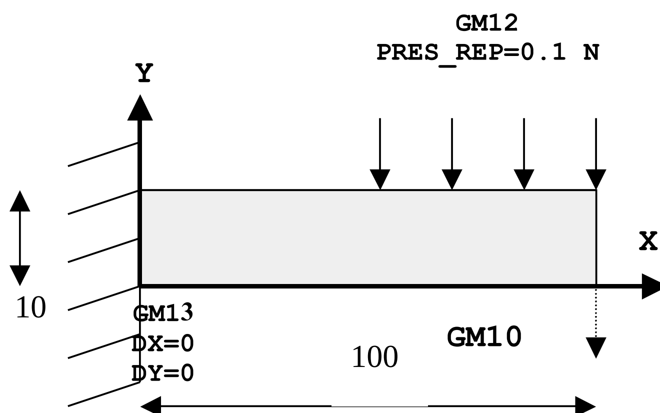


Figure 5.3-a : Schéma du calcul de poutre en flexion

Utilisation de MACR_INFO_MAIL :

L'utilisation de cette commande permet d'obtenir les informations suivantes (.mess) :

```
ANALYSE DU MAILLAGE
===================
     Maillage a analyser
     MA_0
     Date de creation : vendredi 27 septembre 2002 a 15 h 58 mn 20 s
     Dimension : 2
     Degre : 1
     C'est un maillage de depart.

      Direction  |   Unite    |  Minimum   |  Maximum
     --------------------------------------------------
        X        |  INCONNUE  |      0.    |  100.00
        Y        |  INCONNUE  |      0.    |  10.000


   INTERPENETRATION DES ELEMENTS
   =============================

     **********************************************************
     *                                                        *
     *         Recapitulatif sur les faces actives            *
     *                                                        *
     *          Aucun probleme n'a ete rencontre.             *
     *                                                        *
     **********************************************************

   QUALITE DES ELEMENTS
```

```
  ====================
    ***********************************************************
    *      Qualite des triangles du maillage de calcul        *
    * Rappel : la qualite est egale au rapport du diametre    *
    * du triangle sur le rayon du cercle inscrit,             *
    * normalise a 1 pour un triangle regulier.                *
    ***********************************************************
    *  Minimum :   1.0117          Maximum :   2.0158         *
    ***********************************************************

    ***********************************************************
    *                 Fonction de repartition                 *
    *                                                         *
    *    Valeurs      *         Nombre d'elements             *
    *  Mini <  < Maxi *    par classe    *      cumul         *
    *                 *  en %  . nombre  *  en %  .  nombre   *
    ***********************************************************
    *   1.00 <   1.05 *  14.75 .       9 *  14.75 .        9 *
    *   1.05 <   1.10 *  42.62 .      26 *  57.38 .       35 *
    *   1.10 <   1.15 *  16.39 .      10 *  73.77 .       45 *
    *   1.15 <   1.20 *   1.64 .       1 *  75.41 .       46 *
    *   1.20 <   1.25 *   6.56 .       4 *  81.97 .       50 *
    *   1.25 <   1.30 *  11.48 .       7 *  93.44 .       57 *
    *   1.30 <   1.35 *   0.00 .       0 *  93.44 .       57 *
    *   1.35 <   1.40 *   3.28 .       2 *  96.72 .       59 *
    *   1.40 <   1.45 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.45 <   1.50 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.50 <   1.55 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.55 <   1.60 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.60 <   1.65 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.65 <   1.70 *   0.00 .       0 *  96.72 .       59 *
    *   1.70 <   1.75 *   1.64 .       1 *  98.36 .       60 *
    *   1.75 <   1.80 *   0.00 .       0 *  98.36 .       60 *
    *   1.80 <   1.85 *   0.00 .       0 *  98.36 .       60 *
    *   1.85 <   1.90 *   0.00 .       0 *  98.36 .       60 *
    *   1.90 <   1.95 *   0.00 .       0 *  98.36 .       60 *
    *   1.95 <   2.00 *   0.00 .       0 *  98.36 .       60 *
    *   2.00 <   2.05 *   1.64 .       1 * 100.00 .       61 *
    *   2.05 <   2.10 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.10 <   2.15 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.15 <   2.20 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.20 <   2.25 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.25 <   2.30 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.30 <   2.35 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.35 <   2.40 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.40 <   2.45 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.45 <   2.50 *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    *   2.50 <  inf.  *   0.00 .       0 * 100.00 .       61 *
    ***********************************************************

NOMBRE D'ENTITES DU CALCUL
  ==========================


    ***********************************************************
    *                      Les noeuds                         *
    ***********************************************************
    * Nombre total                                *        48 *
    ***********************************************************

    ***********************************************************
```

```
   *                  Les mailles-points                  *
   ********************************************************
   * Nombre total                                *      2 *
   ********************************************************

   ********************************************************
   *                      Les aretes                      *
   ********************************************************
   * Nombre total                                *     15 *
   * . dont aretes isolees                       *      0 *
   * . dont aretes de bord de regions 2D         *     15 *
   * . dont aretes internes aux faces/volumes    *      0 *
   ********************************************************

   ********************************************************
   *                      Les faces                       *
   ********************************************************
   * Nombre total                                *     61 *
   ********************************************************


 CONNEXITE DES ENTITES DU CALCUL
 ===============================


   ********************************************************
   * Les faces      sont en un seul bloc.                 *
   ********************************************************


 TAILLES DES SOUS-DOMAINES DE CALCUL
 ===================================

   Direction  |   Unite
   -------------------------
      X        |  INCONNUE
      Y        |  INCONNUE

   ********************************************************
   *                   Sous-domaines 2D                   *
   ********************************************************
   *Numero*               Nom                *   Surface    *
   ********************************************************
   *    -4 * FAMILLE_MAILLE_-4_______________ *   1000.0     *
   ********************************************************
   * Total :                                 *   1000.0     *
   ********************************************************

   ********************************************************
   *                   Sous-domaines 1D                   *
   ********************************************************
   *Numero*               Nom                *   Longueur   *
   ********************************************************
   *    -3 * FAMILLE_MAILLE_-3_______________ *   10.000     *
   *    -2 * FAMILLE_MAILLE_-2_______________ *   50.000     *
   *    -1 * FAMILLE_MAILLE_-1_______________ *   40.000     *
   ********************************************************
   * Total :                                 *   100.00     *
   ********************************************************
```

On apprend par ce message :

- les coordonnées extrêmes du maillages ;
- l'absence de problème d'interpénétration ;
- un histogramme de la qualité géométrique des mailles (on observera la bonne qualité de ce maillage) ;
- le nombre de nœuds, de mailles points, d'arêtes, de faces ;
- la connexité du maillage ;
- la taille des domaines définis par les groupes de mailles (cette description n'est pas très lisible, néanmoins, on observera que le domaine 2D de la poutre est bien de surface 1000 comme prévu).

Utilisation de `MACR_ADAP_MAIL` option `UNIFORME` :

Observons les résultats obtenus, en comparant un maillage linéaire (`TRIA3`) et un maillage quadratique (`TRIA6`), le maillage initial étant présenté sur la figure 5.3-b. Sur les courbes présentant l'évolution de l'énergie et de la flèche de la poutre en fonction du nombre de raffinement (Figure 5.3-c), deux conclusions s'imposent :

- d'une part les éléments quadratiques démontrent leur évidente supériorité ;
- d'autre part, le remaillage (ici très simpliste puisqu'il est uniforme) prouve son intérêt : le maillage linéaire initial étant très loin d'être suffisamment raffiné, le remaillage permet d'obtenir de bons résultats après quelques itérations.

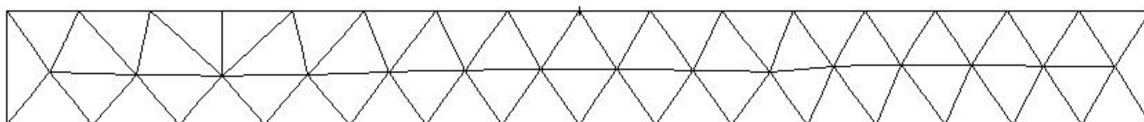


Figure 5.3-b : Maillage initial

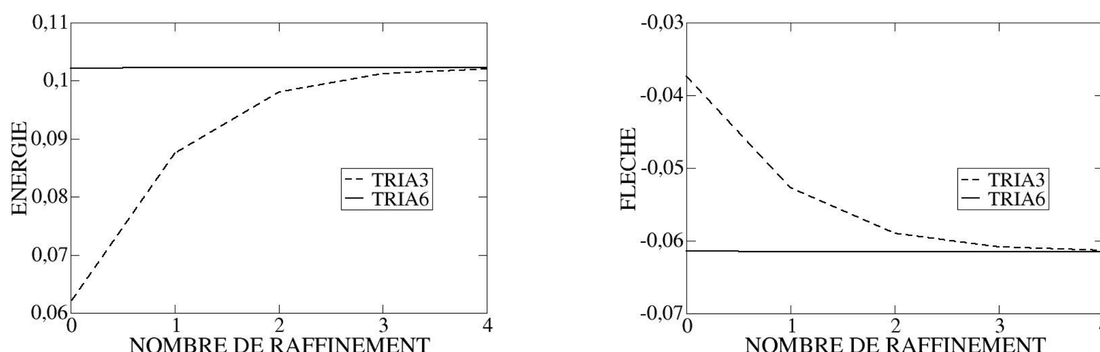


Figure 5.3-c : Evolution de la flèche et de l'énergie avec le nombre de raffinements

Utilisation de `MACR_ADAP_MAIL` option `RAFFINEMENT` :

La première question à régler lors de l'utilisation du raffinement libre avec HOMARD est le choix du champ qui servira de critère pour découper les éléments. Dans cet exemple, on utilise un indicateur d'erreur. Suivant les principes énoncés dans le paragraphe des conseils, le choix a été fait d'utiliser l'indicateur en résidu (même si dans ce cas, on se trouve dans le périmètre d'utilisation des indicateurs de Zhu-Zienkiewicz). En revanche, cet exemple compare les composantes absolue et normalisée de l'indicateur afin d'illustrer la prudence qu'impose l'utilisation de la composante normalisée.
Le maillage est ici linéaire afin d'illustrer clairement l'effet de l'adaptation de maillage, car on a vu précédemment que le maillage initial donne déjà des résultats de bonne qualité avec des éléments d'ordre 2.

Si l'on compare les résultats sur l'énergie avec la composante « absolue » ('ERREST') et la composante « relative » ('NUEST') en fonction du nombre de nœuds (figure 5.3-d où l'on a ajouté la même évolution pour le raffinement uniforme), on observe :

- le raffinement libre avec la composante absolue converge plus vite vers la référence que le raffinement uniforme (d'où l'intérêt de faire du raffinement libre) ;
- le raffinement libre avec la composante relative converge plus lentement vers la référence que le raffinement uniforme, ce qui est à première vue surprenant.

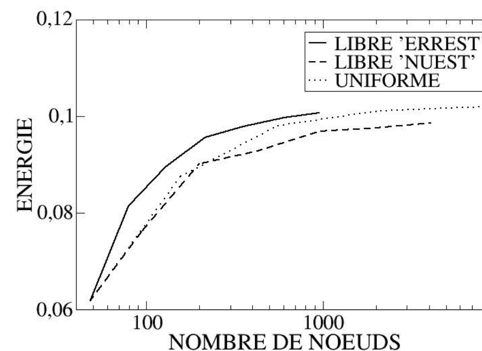


Figure 5.3-d : Evolution de l'énergie en fonction du nombre de nœuds

Ce dernier point s'explique si l'on trace les trois champs issus de l'indicateur d'erreur, ce qui est fait sur les figures 5.3-e, 5.3-f et 5.3-g. Il apparaît clairement que le fait que la norme de la contrainte normalisée soit faible dans une zone (fibre neutre de la poutre en particulier) où le raffinement est moins nécessaire qu'ailleurs (voir l'erreur absolue) rend le résultat de la normalisation $e_{E_{REL}} = 100 \times \frac{e_E}{\sqrt{e_E^2 + \|\sigma_h\|_E^2}}$ aléatoire. En effet, on rappelle que des zones à contrainte de normalisation nulle seront considérées comme ayant une erreur de 100% : s'il faut raffiner dans cette zone, cela sera bon (quoique cela masquera les autres zones à raffiner), si le raffinement est moins nécessaire, cela sera mauvais. Il faut donc bien analyser son problème avant d'utiliser la composante relative de l'indicateur d'erreur, la composante absolue pouvant être considérée comme plus sûre. En particulier, il nous semble que l'utilisation de l'erreur normalisée n'est possible qu'après analyse par l'utilisateur de la carte de contrainte de normalisation.

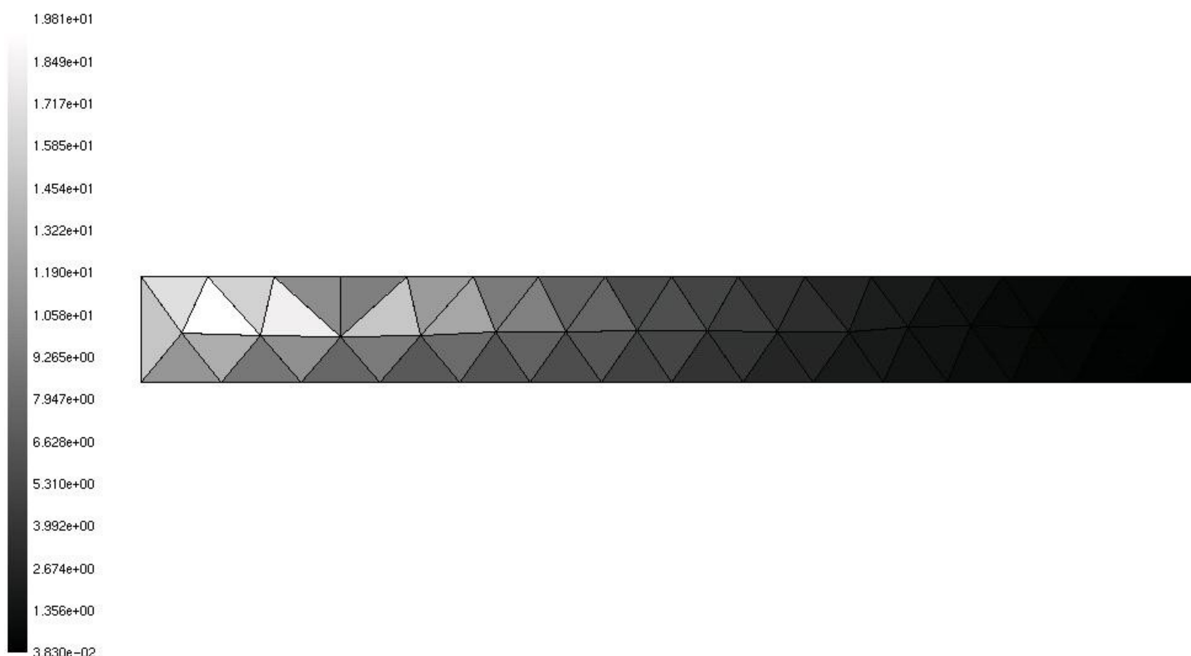


Figure 5.3-e : Composante absolue

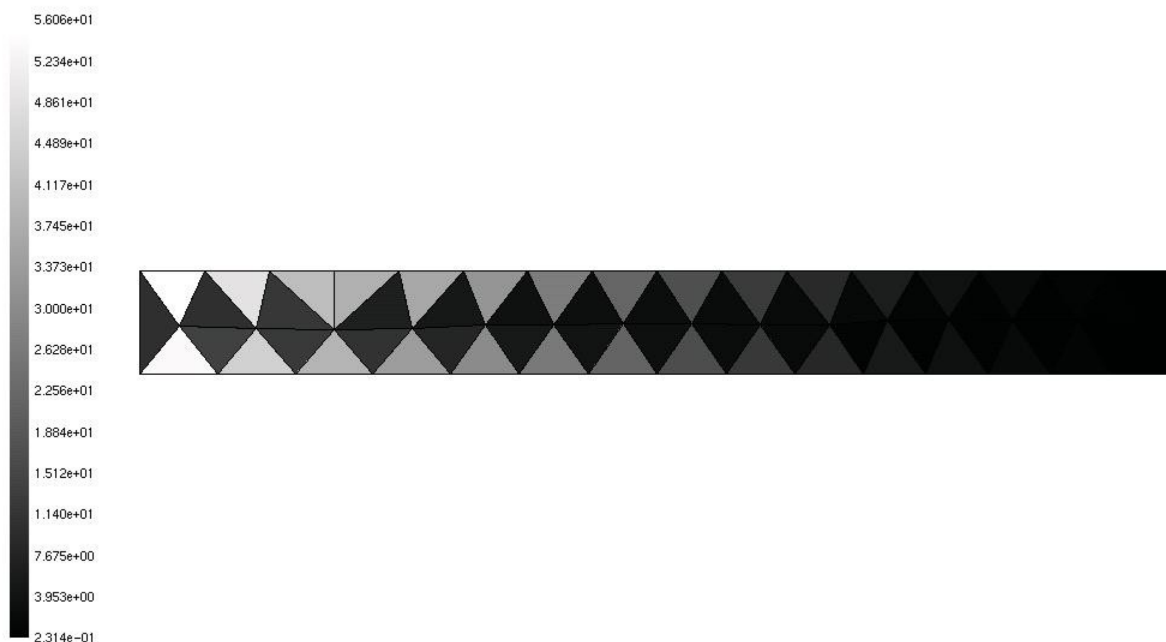


Figure 5.3-f : Norme de la contrainte de normalisation

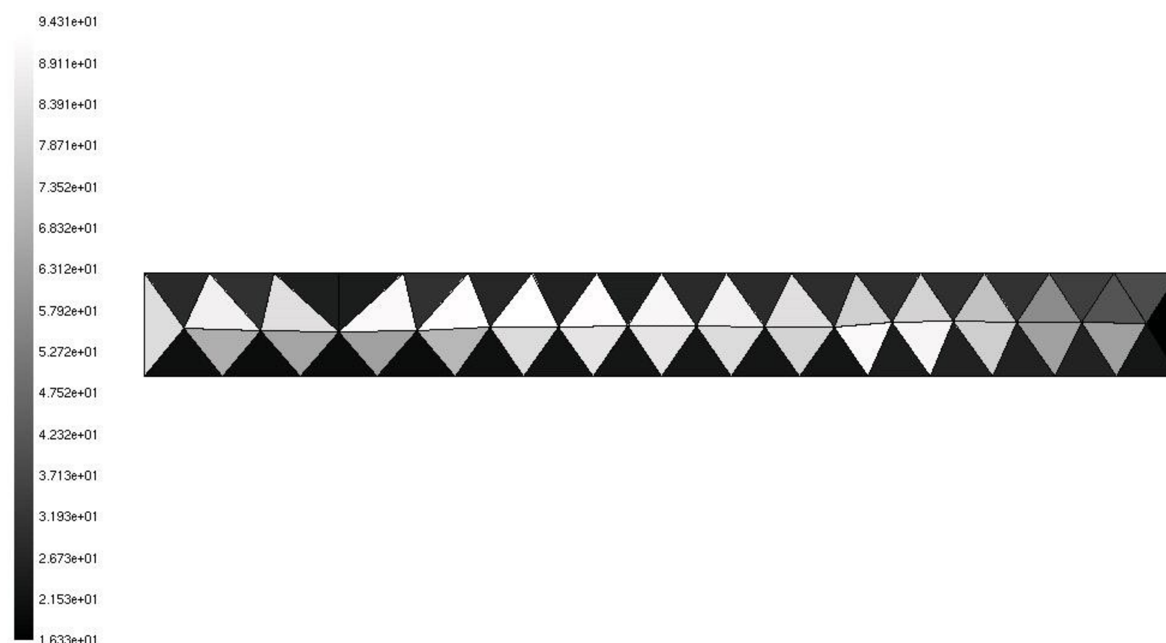


Figure 5.3-g : Composante normalisée

5.4 Culasse en thermique

On considère la structure suivante :

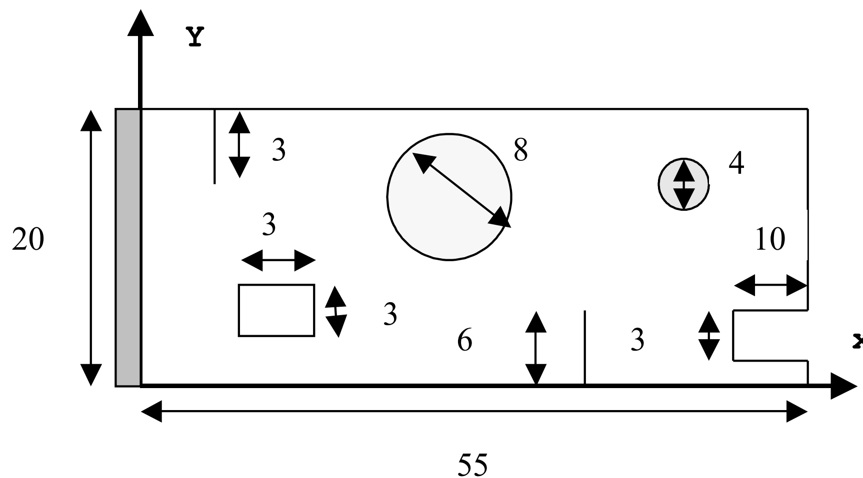


Figure 5.4-a : Schéma du calcul de culasse

soumise aux chargements suivants :

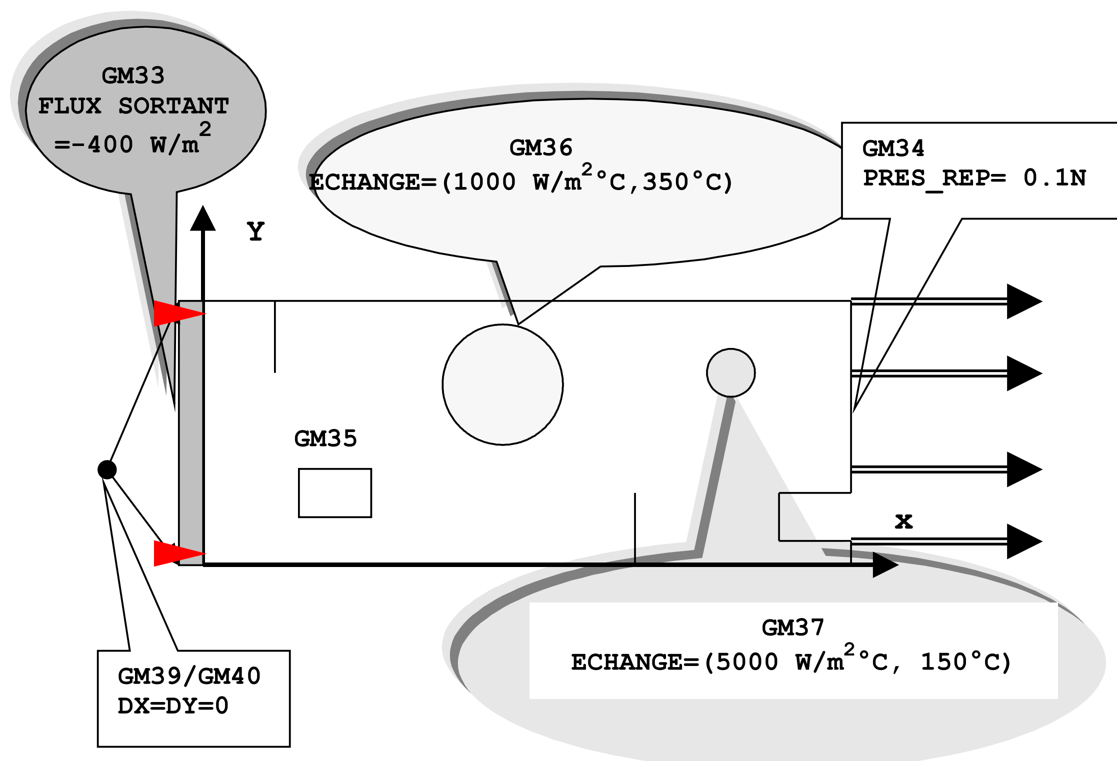


Figure 5.4-b : Schéma des chargements du calcul de culasse

On s'intéresse ici uniquement à la partie thermique pour souligner la possibilité d'utiliser la décomposition des différents termes d'erreur. En effet, dans le cadre d'une utilisation « standard » (c'est-à-dire quand tous les termes d'erreur intéressent l'utilisateur), il faudra choisir l'erreur totale ('ERTABS' ou 'ERTREL') ; en revanche, si l'utilisateur est particulièrement intéressé par une bonne prise en compte des conditions aux limites, il peut ainsi orienter le raffinement en utilisant les différents termes, de flux ou d'échange dans ce cas.

Le maillage initial (figure 5.4-c) vérifie l'un de nos conseils : partir d'un maillage « raisonnable ».

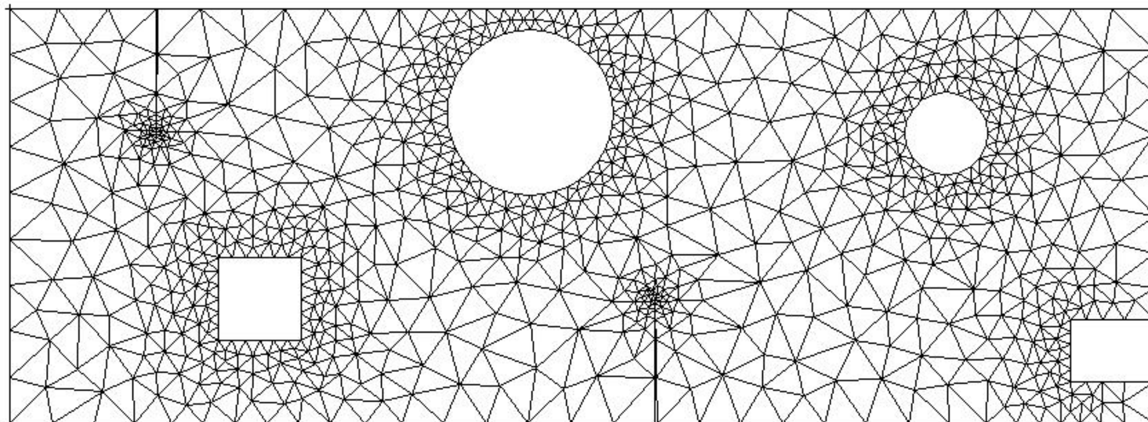


Figure 5.4-c : Maillage initial

Si on réalise un raffinement sur l'erreur totale relative ('ERTREL'), figure 5.4-d :

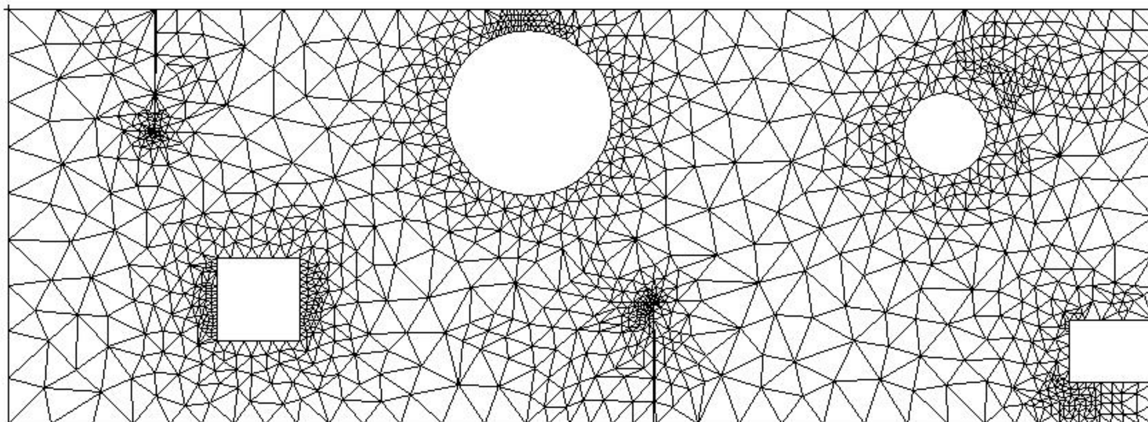


Figure 5.4-d : Maillage raffiné à partir de l'erreur totale relative

et un raffinement sur le terme d'échange relatif ('TERME2'), figure 5.4-e :

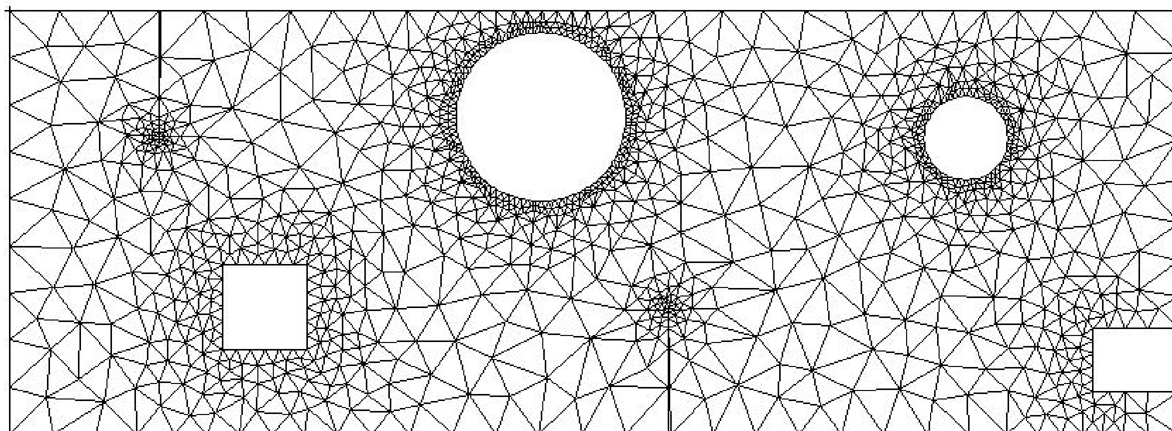


Figure 5.4-e : Maillage raffiné à partir de l'erreur relative sur le terme d'échange

On observe bien évidemment que les maillages adaptés diffèrent fortement. Dans le second cas de figure, le raffinement a bien été orienté vers les perçages, sièges des conditions d'échanges.

5.5 Exemple thermo-plastique

On considère la structure de révolution suivante (modélisée en axisymétrique) :

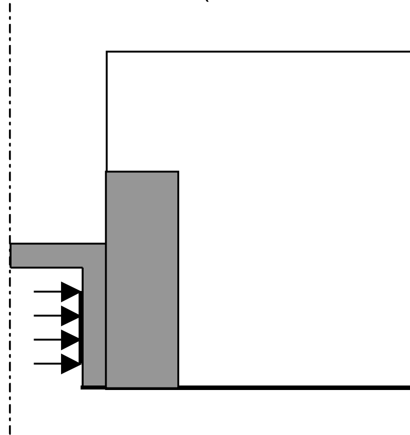


Figure 5.5-a : Schéma du calcul thermoélastique

où les parties grisées sont plastiques, le reste élastique. Le chargement est appliqué en 2 étapes :

- la première consiste en un chargement purement mécanique (pression sur la zone avec des flèches sur le schéma), avec une phase de charge suivie d'une phase de décharge ;
- la seconde consiste en un chargement thermique transitoire (condition d'échange sur les parties inférieures et supérieures de la structure).

Stratégie de remaillage et liste d'instants :

Le chargement est discrétisé selon une liste d'instants, il se pose alors la question : quelle stratégie adopter vis-à-vis du remaillage ? En effet, suivant le cas traité, on peut :

- remailler à chaque pas de calcul : le maillage est alors adapté à chaque pas de calcul individuellement. Il faut alors projeter les champs d'un maillage sur l'autre ;
- remailler une seule fois, à la fin du calcul, et recommencer le calcul depuis le début avec le nouveau maillage.

La première stratégie est à adopter dans le cas où les zones de raffinement évoluent beaucoup, nous en verrons un exemple dans le calcul thermique suivant ; la seconde peut être adoptée dans le cas où les zones de raffinement évoluent peu, comme dans ce cas mécanique où il s'agit de suivre la croissance d'une zone plastique.

Calcul mécanique :

Pour le calcul mécanique, on adopte donc la stratégie suivante :

- calcul de toute la liste d'instants ;
- remaillage ;
- répétition de (1 & 2) jusqu'au résultat satisfaisant.

Ce n'est pas tant la mise en œuvre dans *Code_Aster* qui est intéressante dans ce cas (qui diffère des mises en œuvre précédentes uniquement par le fait qu'il y ait plusieurs instants de calcul) que les résultats obtenus par adaptation de maillage sur un cas non-linéaire.

Pour juger de l'apport du remaillage, regardons les contraintes radiales sur le segment séparant les deux régions (figure 5.5-b) qui sont comparées à une « référence » obtenue par 3 remaillages uniformes : le gain des remaillages basés sur l'indicateur d'erreur est visible.

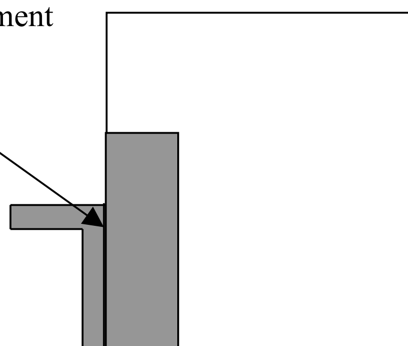


Figure 5.5-b : Lieu de post-traitement

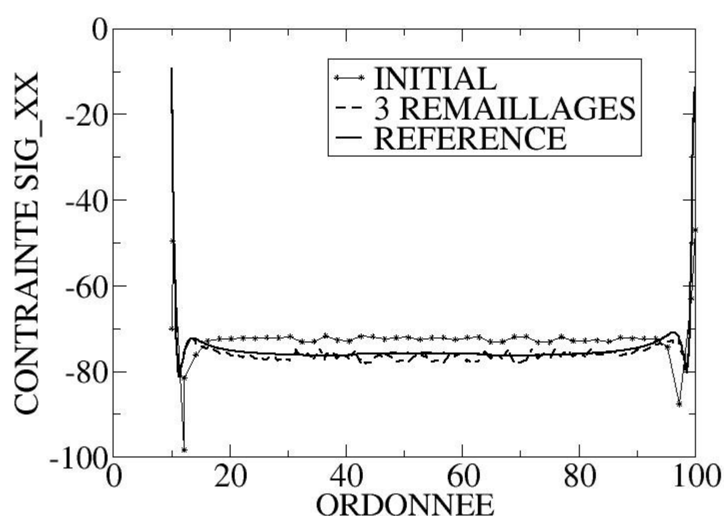


Figure 5.5-c : Profil de contrainte

On trouvera sur la figure 5.5-d, le maillage initial et le maillage après 3 remaillages basés sur l'indicateur d'erreur.

Une indication des variations de la taille (et donc du temps) des résolutions entre le calcul de référence (3 raffinements uniformes) et le calcul avec 3 raffinements basés sur l'indicateur d'erreur est donnée dans le tableau 3.

	Nombre de nœuds	Temps de Calcul
Maillage de référence	175 000	~3000 s
3 raffinements libres (soit 4 calculs)	8 500	~60 s

Tableau 3 : Indication de performances

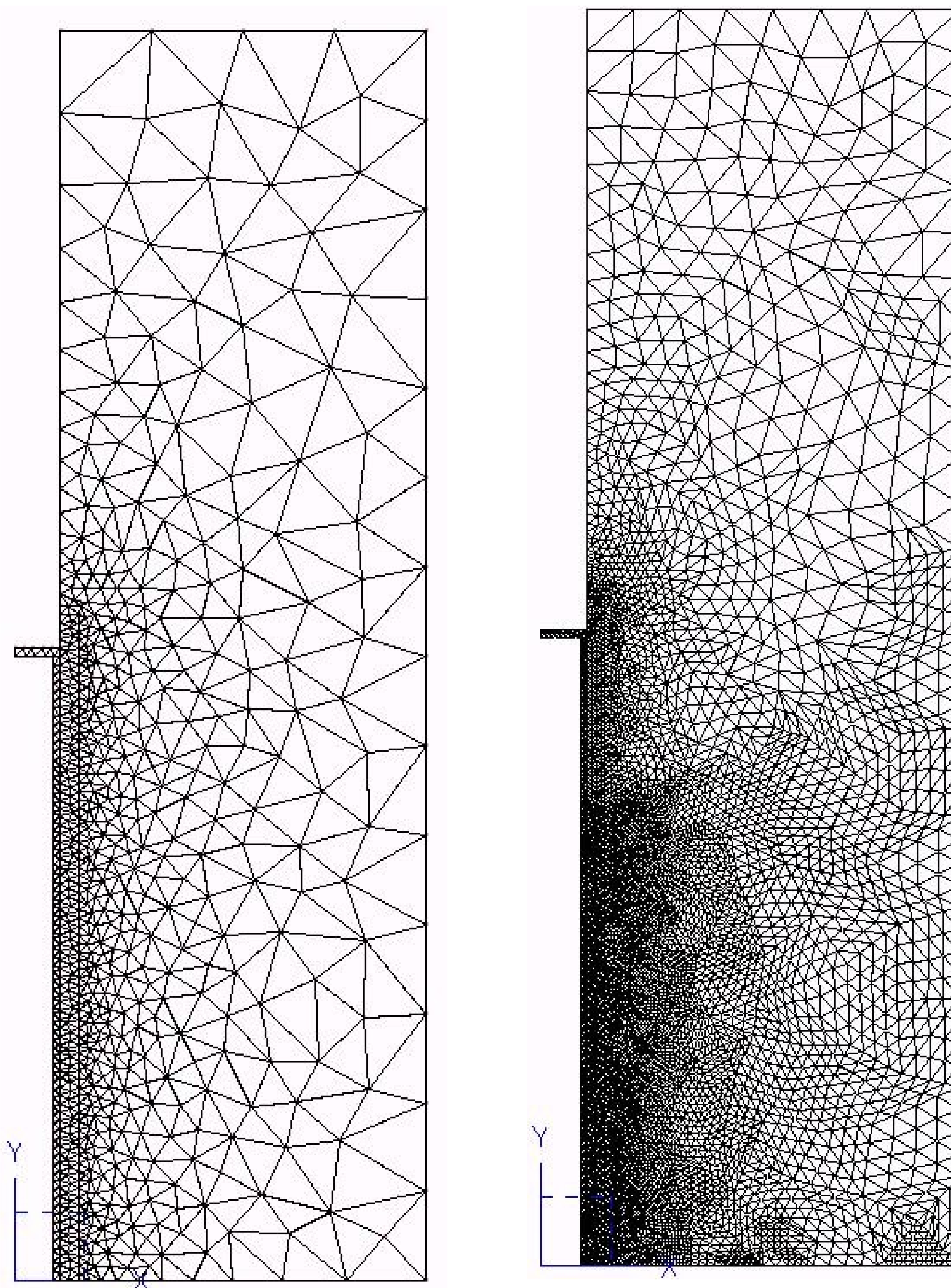


Figure 5.5-d : Maillage initial et après 3 adaptations

Calcul du transitoire thermique :

Il s'agit dans ce cas de calculer un transitoire thermique, deux conditions d'échanges étant imposées en bas et en haut de la structure. Comme la zone qui va présenter un fort gradient de température va se déplacer dans la structure (avancée d'un front), la stratégie adoptée pour le remaillage va en tenir compte : il faut réactualiser le maillage régulièrement au cours du transitoire. En pratique, on subdivise

la liste d'instants en blocs, à l'intérieur de ces blocs d'instants de calcul le maillage sera le même (et le remaillage intervient à la fin du bloc). Il y a donc 3 boucles imbriquées :

- la boucle sur les N blocs d'instants ;
- la boucle sur les remaillages du bloc courant ;
- la boucle (cachée dans THER_LINEAIRE) sur les instants du bloc.

Si l'on regarde les résultats au dernier instant calculé, en particulier la température sur la ligne de post-traitement déjà utilisée en mécanique (figure 5.5-e), on constate l'intérêt de l'adaptation de maillage. Comme on pourra le constater sur les maillages initial et adapté au dernier pas de temps, figure 5.5-f, le maillage n'a pas changé au voisinage proche de la ligne de dépouillement : l'amélioration de la température calculée provient des zones que l'on a raffiné par ailleurs.

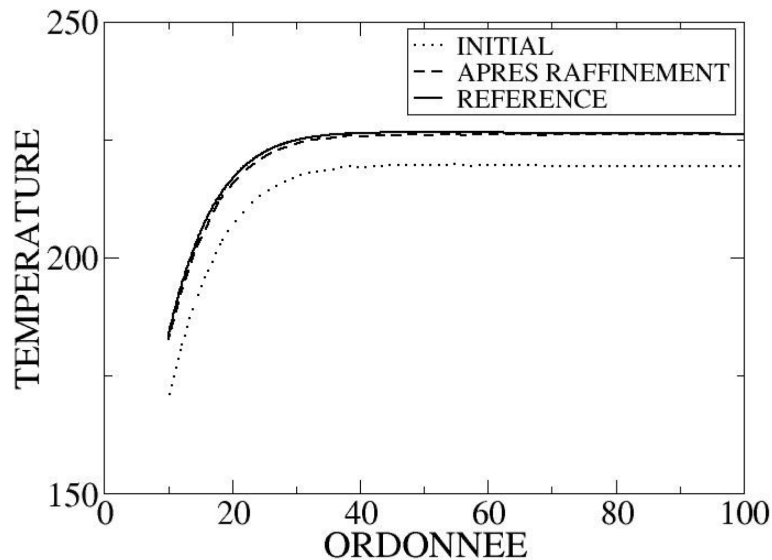


Figure 5.5-e : Maillage initial Profil de température

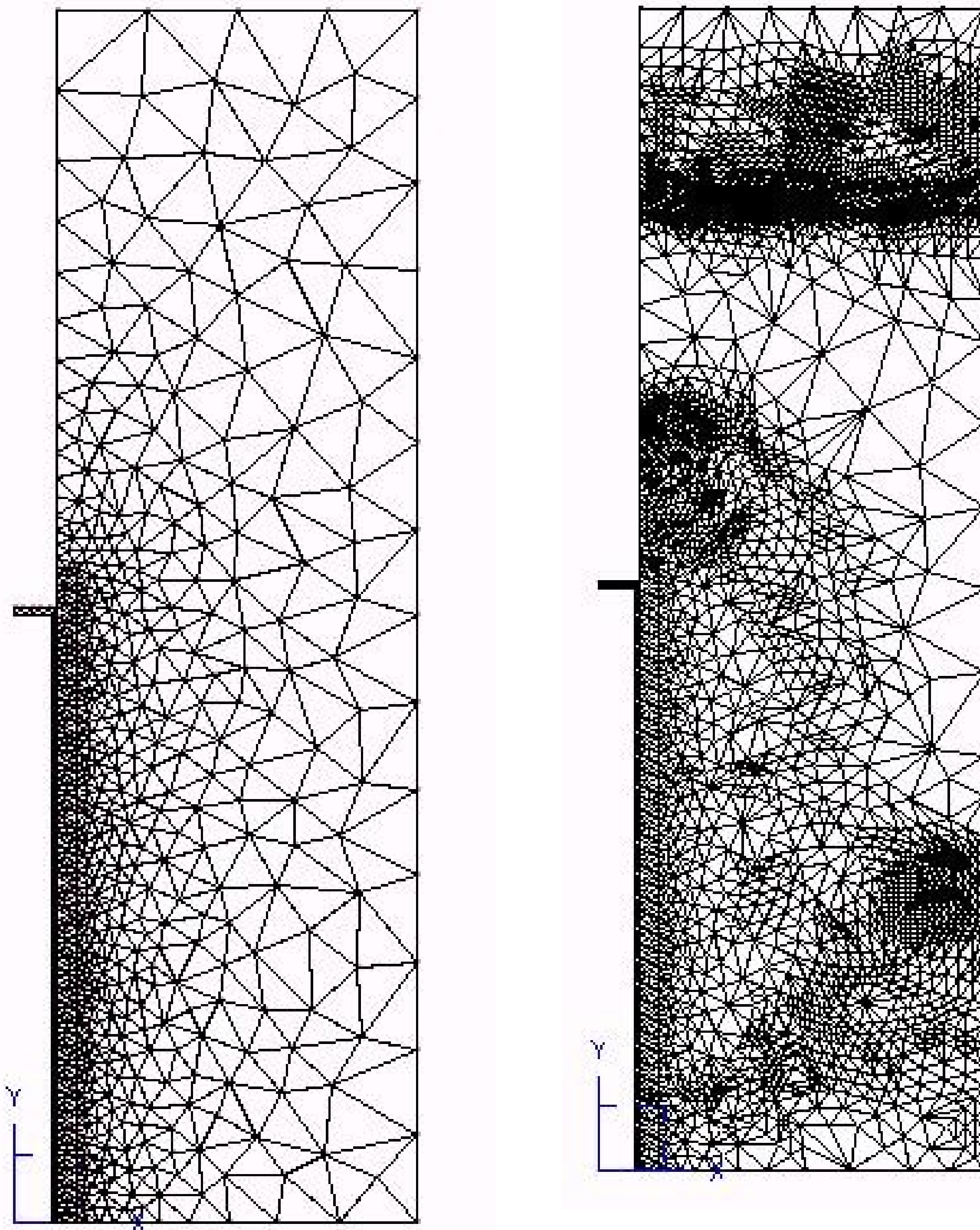


Figure 5.5-f : Maillage initial Maillage initial et au dernier pas de temps de calcul

5.6 Plaque présentant une bande de localisation

Modélisation :

Il s'agit d'une plaque rectangulaire soumis à de la compression. Le comportement du matériau est adoucissant (écrouissage isotrope négatif, loi 'DRUCKER-PRAGER'). Le calcul s'effectue avec la commande STAT_NON_LINE. Le maillage est constitué de QUAD8. Du fait du comportement adoucissant, on observe une bande de localisation de la déformation plastique cumulée. A l'intérieur

de cette bande, le comportement est plastique et l'indicateur de plasticité vaut 1, à l'extérieur de cette bande, le comportement reste élastique et l'indicateur de plasticité vaut 0.

Processus d'adaptation :

L'adaptation du maillage est réalisée avec l'indicateur de plasticité (troisième variable interne V3 de la loi de DRUCK_PRAGER). Le critère de découpage choisi est une valeur seuil fixée à 0.5 (mot clé 'CRIT_RAF_ABS'). Ceci garantit de raffiner dans la zone de localisation, objectif de l'utilisateur dans cette étude.

```
MACR_ADAP_MAIL   (
    ADAPTATION    = 'RAFFINEMENT',
    MAILLAGE_N    =  MAIL_INI,
    MAILLAGE_NP1  =  co ('MAIL_FIN'),
    RESULTAT_N    =  resu,
    NOM_CHAM   =   'VARI_ELGA',
    NOM_CMP    =   'V3',
    CRIT_RAFF_ABS    =   0.5,)
```

Résultat du redécoupage :

Toutes les mailles sont découpées en quatre, même dans la zone élastique. Ce résultat, qui peut paraître surprenant d'un premier abord, est dû au mode de découpage adopté par HOMARD et en particulier sur les règles de mise en conformité (cf. § 2.3). Les figures 5.6-a et 5.6-b illustrent ce résultat.

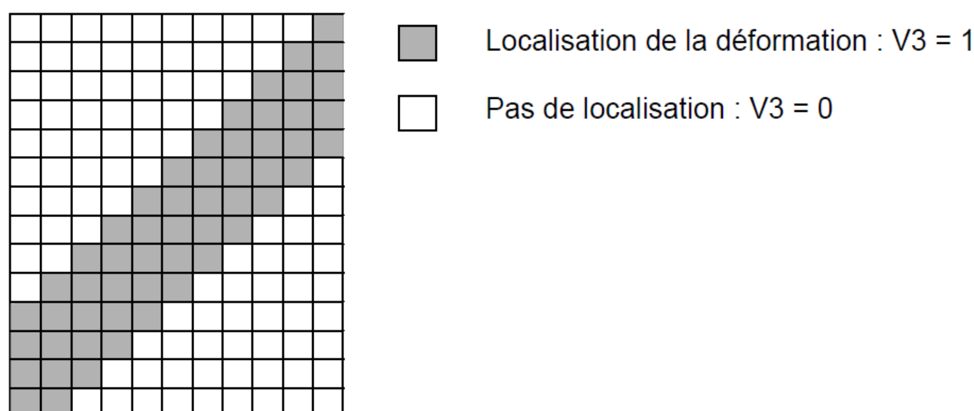


Figure 5.6-a : Maillage initial

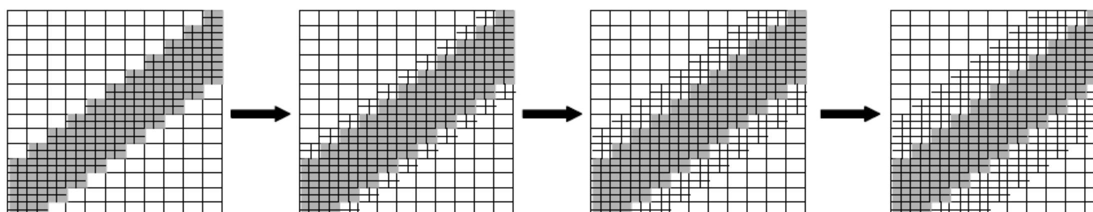


Figure 5.6-b : Découpage de la zone grise puis mise en conformité de proche en proche

6 Références utiles

Les documents [bib1] à [bib4] traitent de l'outil d'adaptation de maillage HOMARD.
Les documents [bib5] à [bib9] traitent des estimateurs d'erreur.
A propos du choix des éléments finis, on pourra se reporter au document [bib11]

[1] G. NICOLAS & al. http://www.code_aster.org/outils/homard

[2] G. NICOLAS, T. FOUQUET, "Logiciel HOMARD - Volume 1 – Présentation générale", rapport EDF H-I23-2008-04107

[3] « Macro-commande MACR_ADAP_MAIL », [U7.03.01]

[4] « Macro-commande MACR_INFO_MAIL », [U7.03.02]

[5] « Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D », [R4.10.01]

[6] « Estimateur d'erreur en résidu », [R4.10.02]

[7] « Indicateur d'erreur spatiale en résidu pour la thermique transitoire », [R4.10.03]

[8] « Détection des singularités et calcul d'une carte de taille », [R4.10.04]

[9] J. DELMAS : « Estimateurs d'erreur en quantités d'intérêt », Compte-rendu AMA 06-66

[10] Cours et TP « Indicateurs d'erreur et adaptation de maillage. Etat de l'art et implantation dans le *Code_Aster* », http://www.code-aster.org/V2/spip.php?article9

[11] « Notice d'utilisation sur le choix des éléments finis », [U2.01.10]

[12] I. PIERRE, rapport EDF H-T63-2006-03661